Incertitude de mesure

Pourquoi une incertitude ?

Toutes les mesures que nous effectuons sont fausses !

Cette affirmation est peut-être un peu exagérée mais néanmoins reflète une réalité, celle que toute mesure d'une grandeur physique se solde par une erreur, souvent petite mais réelle. La mesure exacte de la valeur étant pratiquement hors de notre portée, il nous faut définir une valeur, ou une plage de valeur, ou l'on aura confiance en notre mesure. En fait on ne devrait jamais afficher, donner une valeur sans sa variation probable.

Pour illustrer ceci prenons l'exemple suivant : je mesure la largeur d'une feuille de papier de format A4 (21 cm × 29,7 cm) avec une règle graduée.

- *Je trouve la valeur de 21.5cm, j'ai confiance dans ma mesure elle me semble raisonnable par rapport à l'élément mesuré et l'instrument de mesure. Je considère le résultat de ma mesure comme valeur exacte.*
- *Je trouve la valeur de 22cm, je commence par penser à une erreur de mesure ou que ma feuille n'est du bon format comme je le pensais. Je n'ai pas confiance dans le résultat et je ne considère pas le résultat comme la valeur exacte.*

Pour trouver une valeur exacte, ou tout au moins définir sa plage de confiance, nous avons en fait deux chemins, qui peuvent se combiner.

1. *Définir par calcul et appréciation la plage de confiance de la mesure même, des instruments de mesure, des conditions extérieures et des personnes effectuant la mesure.*
2. *Répéter cette mesure un grand nombre de fois.*

Je vous propose d'étudier l'approche de l'incertitude de mesure par le chemin 2, soit de la mesure répétitive. Mais il est à noter que très souvent nous ne pouvons pas mesurer *plusieurs fois une grandeur physique (instantanéité, difficulté de mesure, prix, etc..) et que dans ce cas il faut prendre le premier chemin qui sort du cadre de cet article.*

De plus je limite cette approche de l'étude de la répétitivité de la mesure, à la seule mesure sans tenir compte des facteurs extérieurs comme la température, l'humidité, le temps, le mesurant, etc. … pour une mesure de longueur par exemple.

Rappel et définition

Avant de commencer il faut rappeler quelques définitions mathématiques

La moyenne

Selon Wikipédia (https://fr.wikipedia.org/wiki/Moyenne) : *"La moyenne est une mesure statistique caractérisant les éléments d'un ensemble de quantités : elle exprime la grandeur qu'aurait chacun des membres de l'ensemble s'ils étaient tous identiques sans changer la dimension globale de l'ensemble."*

Remarque : il est vrai que l'on peut calculer cette valeur selon beaucoup de méthodes : arithmétique, géométrique, harmonique, énergétique, quadratique, etc. Je n'utiliserais que la moyenne arithmétique, que vous connaissez et qui vous est familière. Pour ne pas surcharger l'article, je n'expliquerais pas ce choix et si vous voulez en savoir plus le web est votre ami. La moyenne arithmétique est très sensible aux valeurs extrêmes, donc ce n'est certainement pas la panacée à toutes les situations, néanmoins c'est cette moyenne qui est généralement appliquée.

Le principe de la moyenne arithmétique est l'addition de toutes les valeurs et la division de cette somme par le nombre de valeurs. La moyenne d'un ensemble d'une grandeur x s'écrit mathématiquement comme suit

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On note la moyenne d'un nombre par un trait horizontal sur le signe désignant cette grandeur.
Qui signifie la somme de toutes les grandeurs (∑x) divisées par le nombre (n) de ces grandeurs prises en considération. En statistique il est souvent utilisé la lettre μ pour désigner la moyenne.

Exemple de moyenne :

Un boulanger confectionne dix pains au chocolat. Voici leur poids en grammes (g) :

70 g, 66 g, 7l g, 78 g, 61 g, 63 g, 79 g, 64 g, 72 g, 67 g

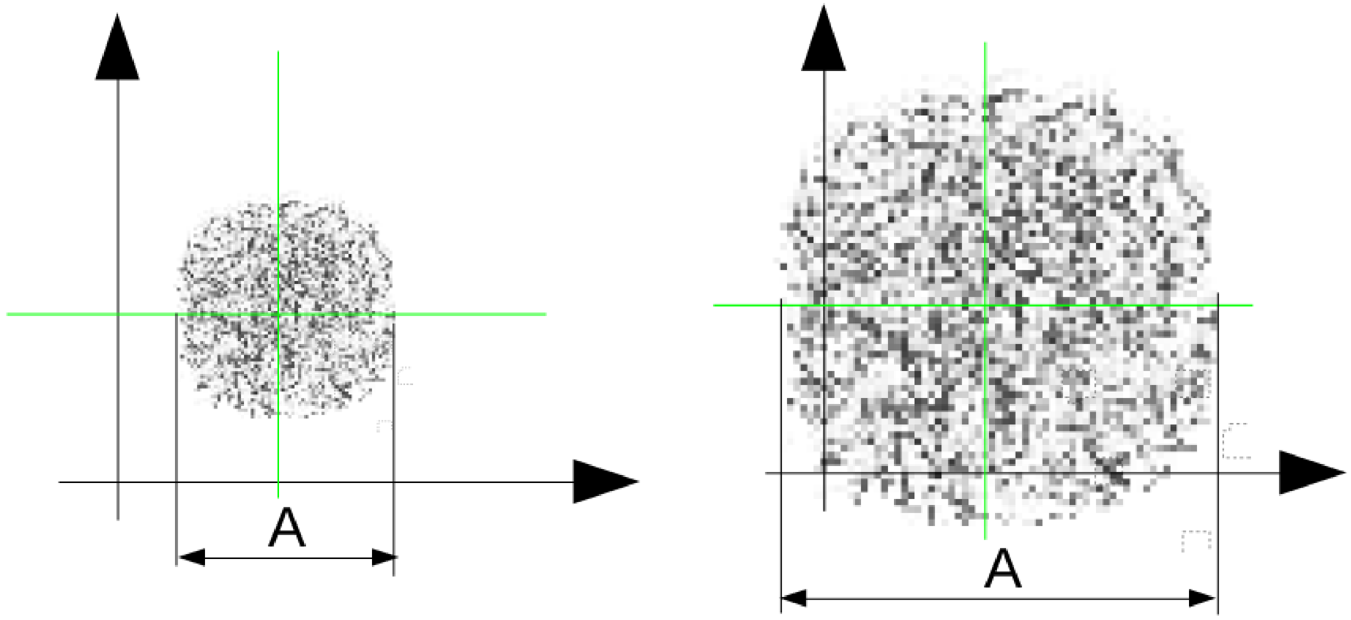
La moyenne sera donc de :

(70+66+71+78+61+63+79+64+72+67) (1 / 10) = 691 / 10 =69.1 g

Ceci signifie que si notre boulanger avait confectionné 10 pains en chocolat de 69 g, il aurait eu le même poids total de pain au chocolat.

L'écart type

La moyenne indique le "centre" d'une répartition de valeurs, mais ne dit rien sur la répartition des valeurs autour de leur valeur moyenne. Exemple, analysons la position moyenne des points des nuages ci-dessous. La position moyenne est identique, car ces nuages sont identiques en forme mais pas en dimension. La position moyenne ne donne aucun renseignement sur la répartition de leurs points.



Par contre on peut remarquer que les grandeurs A, sont nettement différentes selon l'ensemble de points considéré, cette valeur donne une idée de la répartition des points. L'écart type est justement une valeur qui renseigne sur cette répartition autour de la valeur moyenne. Ces croquis ne sont pas la représentation graphique de l'écart type mais c'est l'idée.

Le terme écart type est conventionnellement désigné par la lettre grecque sigma σ et est défini comme la somme des carrés des différences à la valeur moyenne, divisé par le nombre de valeur, sous forme mathématique :

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

Je ne ferais pas la démonstration de cette définition de l'écart type et comme précédemment si vous désirez en savoir plus, "google" est votre ami. Plus l'écart type est grand, plus les valeurs sont dispersées (éloignées) de la valeur moyenne. Plus il est petit, plus les valeurs sont resserrées autour de la moyenne. Si l'on reprend notre exemple de nuage de point, l'écart type du nuage le plus petit sera le plus petit. Comme vous pouvez le deviner, l'écart type est toujours positif.

En reprenant l'exemple précédent, du poids des pains en chocolat, nous aurons un écart-type de :

	poids x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
	70	0.9	0.8
	66	-3.1	9.6
	71	1.9	3.6
	78	8.9	79.2
	61	-8.1	65.6
	63	-6.1	37.2
	79	9.9	98.0
	64	-5.1	26.0
	72	2.9	8.4
	67	-2.1	4.4
Total	691		332.9
Moyenne	69.1		

$$\sum(x-\bar{x})^2=332.9$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{332.9}{10}}=5.77\,g$$

Remarque : Vous trouvez souvent le terme de variance pour définir la répartition des valeurs autour de la moyenne. En fait cette notion, plus récente que l'écart est le carré de l'écart type. C'est en fin compte le même concept et pour nous ménager le cerveau ne parlerons que de l'écart type.

Le terme "précis" est souvent lié à l'écart type, comme nous le verrons en fin d'article.

Deux façons de calculer l'écart type, pourquoi ?

Vous trouverez dans la littérature ou sur internet deux formules pour calculer l'écart type, soit :

$$\sigma_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{n-1}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$$

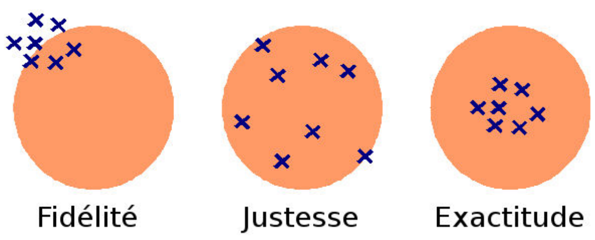
La différence est le terme diviseur soit “n” ou “n-1”.

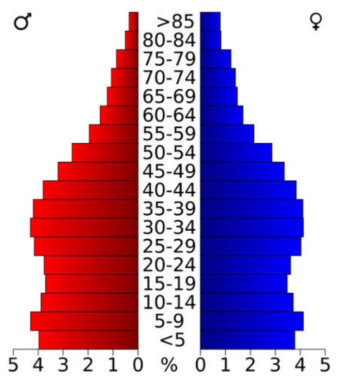
En fait, il y a une différence entre le cas d’une série de mesure complète (on connaît tous les éléments) qui est rare en pratique (mesure sur l’ensemble du lot) et le cas où l’on mesure qu’une partie des éléments (échantillonnage). La division par n-1 signifie que l’on « pénalise » le cas où l’on ne traite pas tous les éléments de l’ensemble à mesurer.

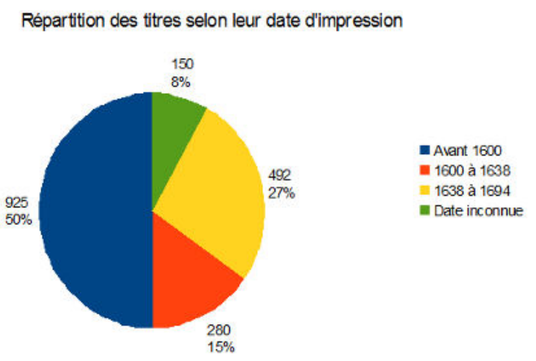
Mesure statistique

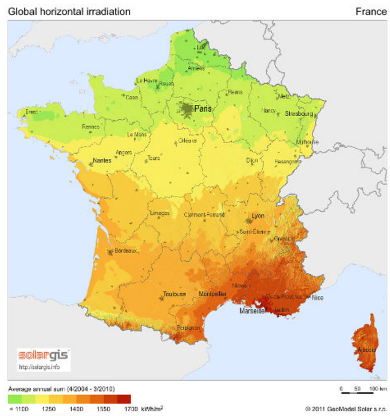
C’est le type de mesure où le nombre de mesurage est grand et répétitif. L’exemple typique étant la mesure de la taille d’une population. Dans ce type de mesure, lorsque l’on parle des résultats des mesures, on s’attarde sur la répartition des résultats. Que signifie ?

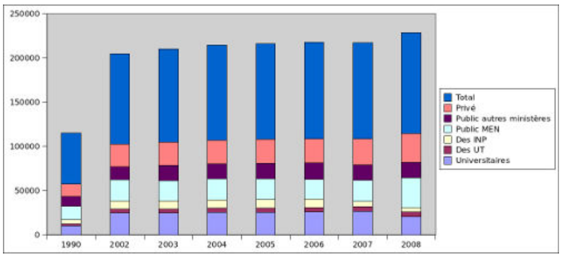
La répartition des résultats de mesurage est représentée sous diverses formes graphiques (camembert, bâton, courbe, plan couleur, carte, etc) ou sous forme mathématique (formule) ou encore par une terminologie (précision, exactitude, etc). Quelques exemples de répartitions :

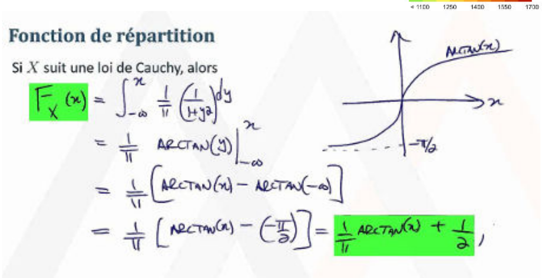


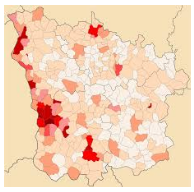












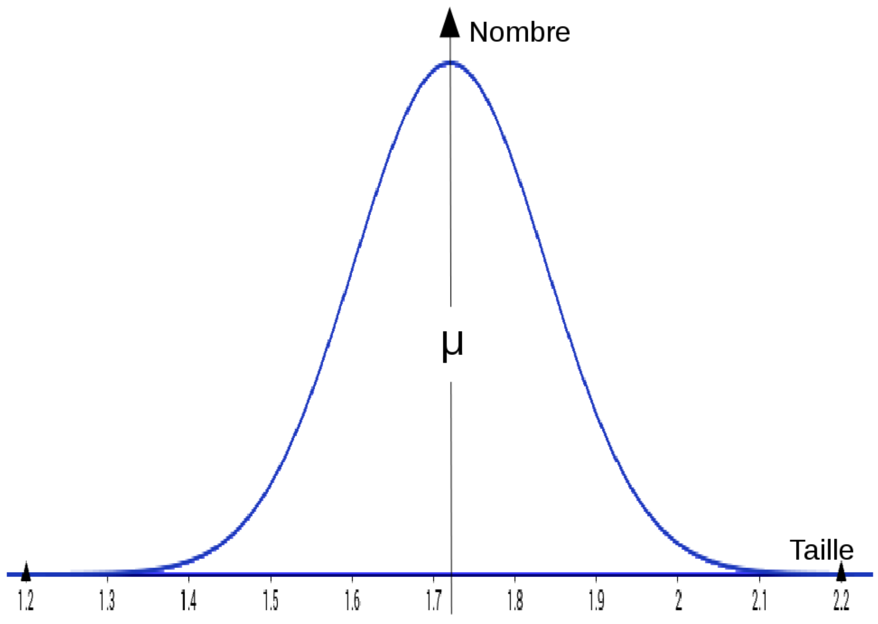
La mesure statistique conduira très souvent à une répartition de type "gaussienne" (courbe en forme de cloche) tandis qu'un mesurage du poids de pain au chocolat avec une balance digitale pourra conduire à une répartition différente. Ceci pour dire que bien que je vais vous présenter la répartition des mesurages en forme de cloche (courbe de Gauss) ce n'est pas et de loin pas la seule existante.

Mesure fortement répétitive

Si l'on mesure la taille de la population des hommes en France, on trouvera quelques personnes avec des tailles extrêmes comme 1.40m ou 2.1m. Si je suis dans la rue et je mesure la taille des hommes qui passent devant moi, je trouverais facilement des personnes autour de 1.75 à 1.80m par contre je sais bien je devrais avoir beaucoup de chance pour mesurer une personne de 1.4m.

Autre exemple, vous jouez à pile ou face. Vous savez, si la pièce n'est pas truquée, que lors d'un nombre très élevé de lancers, vous obtiendrez environ 50% de pile et 50% de face. Mais à chaque lancer, quels que soient les résultats précédemment obtenus, vous aurez 1 chance sur 2 d'obtenir face.

Si l'on cherche à représenter graphiquement cette série de mesures, nous mettons horizontalement la taille mesurée et verticalement le nombre de fois que cette taille a été *effectivement mesurée. Nous allons avoir une [répartition de Gauss "une gaussienne"]() (dite loi normale).*



Comment interpréter cette répartition ?

- *μ est la moyenne*
- *Horizontalement, nous avons les tailles des personnes mesurées, tout à gauche par exemple 120 cm et tout à droite 220 cm.*
- *Verticalement nous avons le nombre de cas trouvé pour une taille donnée.*

Plus la courbe est haute plus le nombre de personne de même taille est grand. L'équation mathématique de cette courbe est assez compliquée, mais à titre indicatif

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}$$

C'est la courbe y=f(x) avec y : nombre de personnes à une taille x.

μ : La moyenne (voir précédemment)

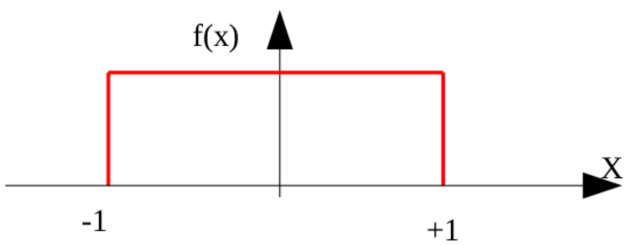
σ : L'écart type (voir précédemment)

Ce qu'il y a intéressant et remarquable avec cette courbe, c'est qu'elle est complètement définie avec les valeurs de la moyenne et de l'écart type.

Attention bien que la loi normale (courbe de Gauss) couvre beaucoup de cas, mais ce n'est pas la seule et elle ne s'applique pas pour tous les cas. Si le nombre de mesure est plus grand que 30 environ, on peut utiliser cette répartition avec les précautions d'usage. Il y a des méthodes pour déterminer si la série de mesure répond à une mesure statistique en répartition (loi) normale.

Répartition uniforme

C'est juste pour présenter un cas de mesure avec une autre forme de répartition. Imaginons le cas suivant : nous avons un instrument de mesure qui a une résolution de 1mm, si nous mesurons avec cet instrument un ensemble de pièces de longueur de 100mm, nous aurons une impossibilité de définir dans l'espace du millimètre la valeur de la longueur. Dans ce cas la répartition des mesures est dite uniforme et le diagramme y=f(x) est une constante.



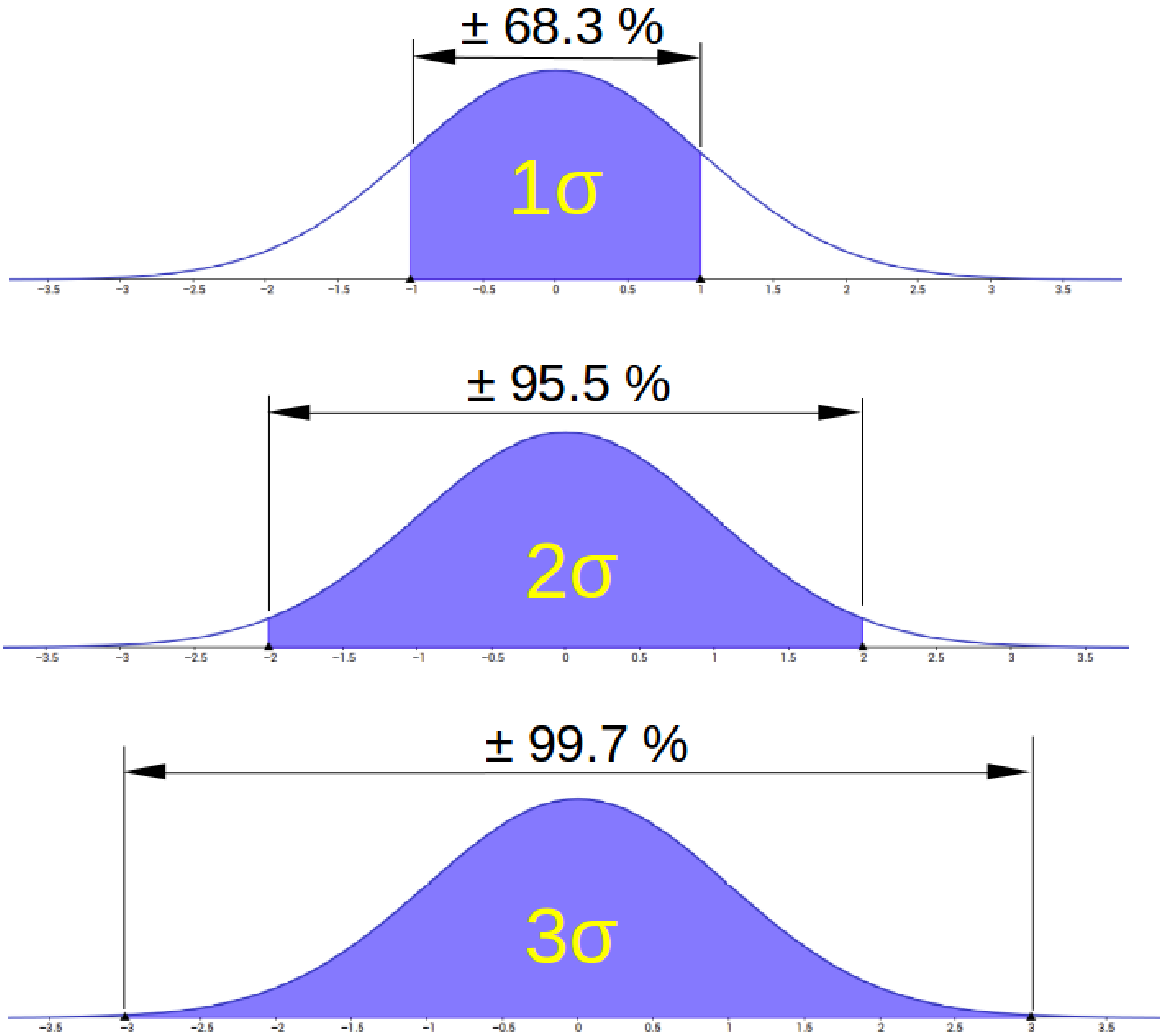
Dans la climatisation et la régulation on trouve encore d'autres lois de répartition comme les lois dérivées des arcs sinus.

Plage de confiance et incertitude

Plage de confiance

Dans le cas de la mesure de la taille des hommes dans la rue, on peut se demander quelle est ma chance ou malchance de, par exemple, rencontrer un homme de moins de 1.30m. Quelle est notre confiance dans le fait que le prochain a être mesuré fasse moins de 2m par exemple ? Ai-je 90% de chance que la prochaine personne soit d'une taille comprise entre 1.65m et 1.90m, par exemple ? La plage de confiance c'est l'ensemble des tailles entre un mini et un maxi, de 1.65 à 1.90m et la chance que la prochaine mesure se produise dans cette fourchette, dans cette plage.

Dans le cas de la répartition selon la loi normale, nous avons une relation directe entre cette valeur de confiance et la zone de dispersion des valeurs. Rappelons que l'écart type est directement à la notion de dispersion. Ce qui est remarquable avec ces écarts type c'est que si l'on prend une plage de confiance d'un sigma (± σ), de 2 sigma (±2 σ) ou de 3 sigma (±3 σ), nous aurons une confiance respectivement de 68.3%, 95.5% et de 99.7% dans les valeurs trouvées, ceci est valable uniquement pour la loi normale.
De façon conventionnelle et habituelle, dans l'industrie, une mesure sera donnée avec une plage de confiance de 2 σ ce qui représente une plage de confiance de 95.5%. Autrement dit, si l'on prend une pièce au hasard dans un lot, et l'on mesure la partie contrôlée avec une plage de confiance de ±2 σ , elle aura 95.5% de chance d'avoir cette mesure dans la plage de confiance MAIS cela signifie également que l'on aura 0.5% de chance d'avoir une mesure hors plage de confiance. De plus il est rigoureusement impossible de prédire avec certitude que la prochaine mesure ne soit complètement hors cadre, c'est à dire complètement "fausse", la plus éloignée de la moyenne jamais trouvée.



Incertitude

L'incertitude de mesure est une notion très importante que l'on retrouve dans tout de sorte d'activité (médical, industrie, sport, géologie, astronomie, etc).

On souhaite définir de combien notre mesure est éloignée de la "vraie valeur".

L'idée de base communément admise, et même normée, est qu'une valeur vraie est la valeur mesurée avec une erreur, soit mathématiquement :

$$y = ym + E$$

y est la "valeur vraie"

ym est la valeur mesurée

E est l'erreur de la mesure

Voilà posé comme cela, c'est nettement plus clair !!!! La valeur E (l'erreur) comporte diverses facettes qui peuvent être ramenées à deux erreurs distinctes. Je vous ai "subtilement" présenté cette approche en début d'article. Maintenant je veux simplement mieux formaliser cette présentation.

- *une erreur aléatoire, souvent désignée par la lettre grecque Δ*
- *une erreur systématique, souvent désignée par la lettre grecque ε*

Erreur systématique

L'erreur systématique, qui, comme précédemment dit, sort du cadre de cet article, car les sources de cette erreur sont très nombreuses et pas facilement modélisable mathématiquement. Quelques exemples :

- *les valeurs physiques : la température, la pression,….*
- *les moyens de mesure : décalage d'échelle, calibration de l'instrument, la présence de l'instrument lui-même, …*
- *l'objet : la configuration de l'objet mesuré, la matière de l'objet, …..*

Il est possible de la réduire ou la définir, en mesurant la grandeur physique avec plusieurs instruments, en utilisant diverses méthodes de mesure, en la comparant avec un étalon, etc. Ce que l'on remarque c'est qu'augmenter le nombre de mesures ne réduira pas cette erreur, le seul moyen de la réduire c'est d'appliquer une correction.

Erreur aléatoire

Contrairement à l'erreur systématique, on sent bien qu'une augmentation du nombre de mesures permet une réduction de ce type d'erreur. Si l'on se souvient des moyennes et des écarts types on peut imaginer appliquer ces valeurs calculées à l'erreur aléatoire. Dans ce cas on cherche les moyennes de séries de mesure effectuées un grand nombre de fois, on obtiendra généralement une répartition normale de ces mesures. L'écart type de cette moyenne correspondant à la variation de la moyenne et se calcule comme suit :

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ *Comme le montre le terme diviseur, plus le nombre de cas est grand (n>>)*

plus cette variation de la moyenne est faible. Si l'on veut améliorer la précision d'un facteur de 10, il faut effectuer 100 fois plus de mesures.

En résumé si l'on effectue n mesures d'une grandeur on peut déterminer son incertitude comme suit :

$$\mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Comme je l'ai déjà mentionné, c'est juste si le nombre d'échantillons de mesure est grand. Généralement en pratique nous ne pouvons pas effectuer un grand nombre d'une même mesure (temps, commodité, coût, etc), ceci nous oblige à utiliser un facteur correctif pour le calcul de l'écart type de la moyenne. Au début du 20ème siècle, William Gosset (Student) défini ce facteur de correction empirique pour compenser l'écart lorsque le nombre de mesure est faible. Le coefficient de Student t vaut pour une plage de confiance de σ (68.3%).

nombre mesure	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	>
Coeff de Student	t	1.84	1.32	1.2	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.03	1.01	1

Comme nous utilisons la plage de confiance de 2σ, nous aurons 2 fois le coefficient

$$\mp\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} 2 \cdot t\right)$$

Cas pratique

Nous avons mesuré à l'aide d'un pied à coulisse une pièce. Huit personnes ont effectué l'opération voici leurs résultats.

numéro	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur (mm)	56.83	56.83	56.87	56.83	56.84	56.85	56.82	56.83

La première chose que l'on peut faire, c'est calculer la moyenne :

moyenne = (56.83+56.83+56.87+56.83+56.84+56.85+56.82+56.83) / 8 = 56.837

Maintenant on va déterminer la dispersion car l'on considère que ce type de mesure définit une courbe normale. Nous pouvons déterminer l'écart type, et nous considérons que nous avons procédé à un échantillonnage de la mesure. Donc on applique la formule en n-1 et l'on trouve 0.0158 mm pour l'écart type σ. L'incertitude, elle est définie par :

$$\pm\, 0.0158 \bullet 2 \bullet 1.08 / \sqrt{8} = \pm 0.012 \text{ mm}$$

soit cette série de mesure nous dit que pour une plage de confiance de 68% la valeur de la grandeur mesurée vaut :

$$56.84 \pm 0.012 \text{ mm}$$

Conclusion

Dans cet article, nous nous sommes attaqué à une petite partie des erreurs de mesures, nous avons laissé volontairement beaucoup de source de problème hors de notre propos. Malgré toutes ces restrictions, on constate que l'incertitude peut prendre de l'ampleur et qu'il est toujours nécessaire de se poser la question de la précision, de la justesse des valeurs que l'on manipule. Je pense même qu'actuellement cela est encore plus important, *car les calculs sont très rapides, aisés, précis avec les moyens modernes, mais le résultat dépend énormément de l'exactitude des valeurs de départ et souvent on l'oublie. Je vois trop souvent des résultats de calcul avec 5 ou 6 chiffres après la virgule alors que les valeurs des grandeurs physiques de départ sont certaines fois connues à seulement 20% près.*