Opérateurs, y en a encore !

Aujourd'hui on parle (enfin c'est plutôt : j'écris et vous lisez) du Laplacien. Avant de se lancer dans l'aventure un mini rappel des autres opérateurs mathématiques différentiels. Comme nous en avons déjà parlé, voir les articles précédents (article 1 et article 2), ce sera rapide.

Rappel

Nous connaissons tous des opérateurs mathématiques arithmétiques comme le "plus", le "moins", le "multiplier" et le "diviser". Ce n'est pas du très bon français, mais je suis sûr que vous voyez de quoi je parle. Il existe d'autres opérateurs mathématiques car un opérateur n'est qu'un symbole d'une fonction mathématique.

Si j'écris 2+3, vous n'avez aucune difficulté pour comprendre ce que j'écris, car vous connaissez l'opérateur mathématique + et qu'elle est sa fonction ! Si je vous écris :

$$\vec{\nabla} T$$

En vous spécifiant que T est la température autour d'un feu de camp, si vous savez interpréter le symbole nabla ∇ (c'est son nom) et ce que signifie la flèche au-dessus, vous n'avez aucune difficulté à appréhender ce que j'ai écrit. C'est un peu comme si vous avez sur un panneau " ขาย ", seuls ceux qui ont l'habitude de la langue thaï comprendront "à vendre". Les opérateurs mathématiques différentiels sont des opérateurs qui définissent des relations locales (petite échelle) ce que sous entend le terme différentiel en fait. Ce sont des outils mathématiques importants pour l'électromagnétisme ou la mécanique des fluides par exemple.

LES GRANDEURS

Les grandeurs physiques sont classées en deux groupes, celles qui peuvent être définies *entièrement par une valeur, on parle de grandeur scalaire, et celles qui nécessitent deux (ou plus) valeurs pour être définies, on parle dans ce cas de grandeurs vectorielles.*

<u>Exemple</u> : la température est une grandeur scalaire et la vitesse est une grandeur vectorielle

<u>Symbole</u> :

scalaire : pas de symbole (ça c'est simple !)

vectoriel : une flèche → sur le dessus de la grandeur comme ceci : $\vec{G}$

LES CHAMPS

Le champ d'une grandeur physique permet de traiter l'ensemble des données d'une grandeur physique répartie sur une zone, un temps, etc.

<u>Exemple</u> : la répartition de la pression atmosphérique (champ scalaire) et la vitesse du vent (champ vectoriel) en France à une date précise.

<u>Symbole</u> : pas de symbole particulier

LE GRADIENT

C'est la variation ou la répartition d'une grandeur physique.

<u>Exemple</u> : la variation spatiale de la température dans une pièce (champ du gradient de température).

<u>Symbole</u> : $\vec{grad}\,T$ *ou* $\vec{\nabla}\,T$

<u>Règle</u> : s'applique à un champ scalaire et donne un champ vectoriel

LA DIVERGENCE

La divergence cherche à représenter la variation d'écartement d'un champ vectoriel. On peut dire que la divergence représente la densité du champ vectoriel.

<u>Exemple</u> : La répartition de la variation de température due à une source de chaleur

<u>Symbole</u> : $\mathrm{div}\cdot\vec{v}$ ou $\nabla\cdot\vec{v}$ *(multiplication scalaire)*

<u>Règle</u> : s'applique à un champ vectoriel et donne un champ scalaire

LE ROTATIONNEL

Indique la rotation d'un champ vectoriel, les lignes de champ ont tendance à tourner autour d'un point (rien que son nom est déjà un indice !).

Exemple : le champ de la vitesse du vent dans une tornade.

Symbole : $\vec{rot} \; x \; \vec{v} \; ou \; \vec{\nabla} \; x \; \vec{v}$ *(multiplication vectorielle)*

Règle : il s'applique à un champ vectoriel et donne un champ vectoriel

Le laplacien

Déjà il a droit à son symbole propre : Δ *appelé : Le Laplacien .... je suis d'accord les mathématiciens ne se sont pas trop fatigués sur ce coup là !*

En fait il y en deux de Laplacien :

1.- le laplacien scalaire qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire. (on en parle)

2.- le laplacien vectoriel qui transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel. (on n'en parle pas)

Mais que représente-t-il de si important pour avoir droit à son propre symbole ?

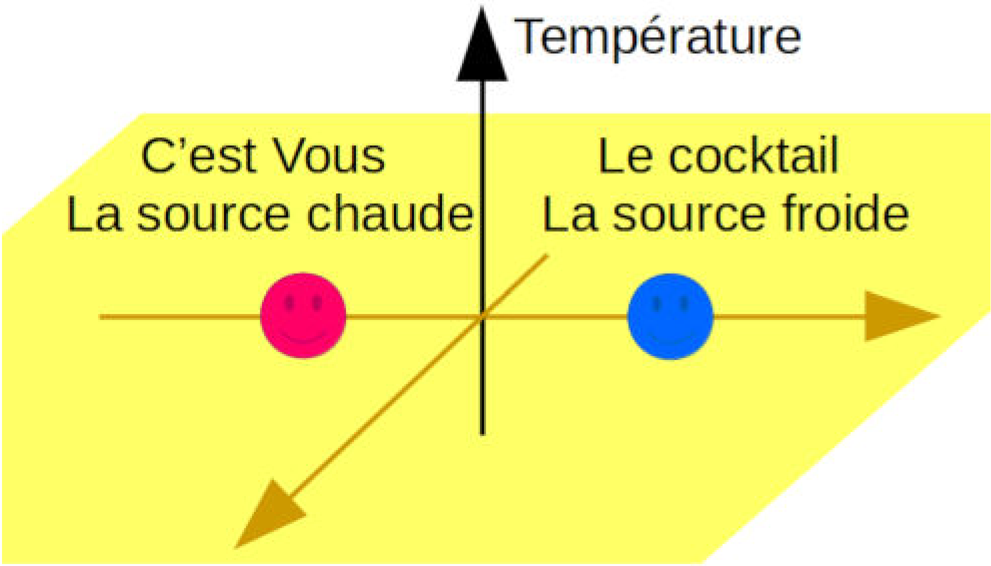
Le Laplacien scalaire représente la courbure d'un champ scalaire. Prenons un exemple, vous voulez connaître le champ de température dans l'endroit où vous vous trouvez. Cela veut dire définir les points chauds et froids. Une fois cette carte (définition) effectuée, vous pouvez tracer (calculer) le gradient de la température en cet endroit puis en déduire, via la divergence, le laplacien, donc comment varie cette température.

EXPLICATION PAR L'EXEMPLE

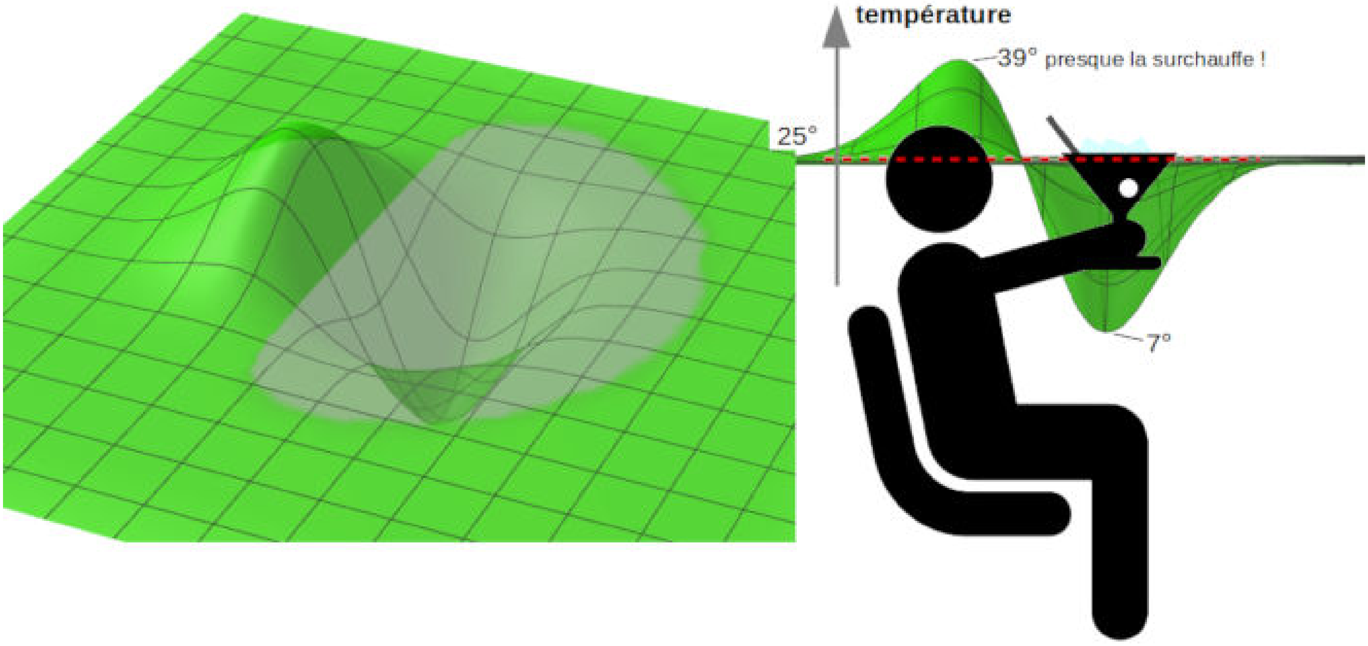
Lançons-nous ! Imaginez que vous réfléchissez fortement aux grands problèmes de ce monde. Oui, oui, c'est vous avec un cocktail bien frais (c'est pour réfléchir) et donc comme vous réfléchissez intensément, les problèmes du monde méritent bien cela, on peut concevoir que vous représentez une source de chaleur. Si vous ne comprenez pas la situation, il faut penser davantage   ! Bien sûr le cocktail lui est une source de rafraîchissement.

Comme la situation mondiale est compliquée et que vous avez donc beaucoup à réfléchir, nous allons un peu simplifier notre analyse pour alléger votre fardeau. Nous limiterons notre analyse de la température à un instant donné. Ce sera lorsque vous "saluerez" le monde et cela dans le plan définit par ce salut magistral !

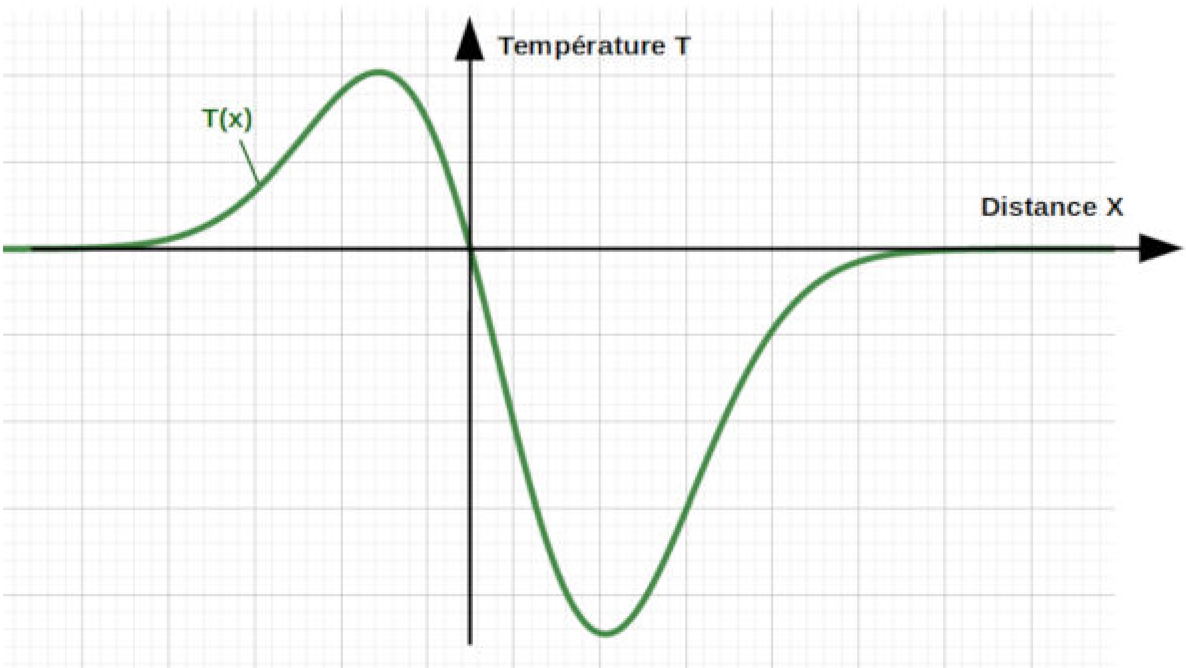
Ce qui peut se schématiser par deux points (nous sommes peu de chose en fin de compte !).



Si l'on trace le champ scalaire de la température autour de vous, pour le plan définit, on trouve une forme (c'est arbitraire, ne vous vexez pas !) comme suit avec une température uniforme à une certaine distance des sources de chaleur et de froid.



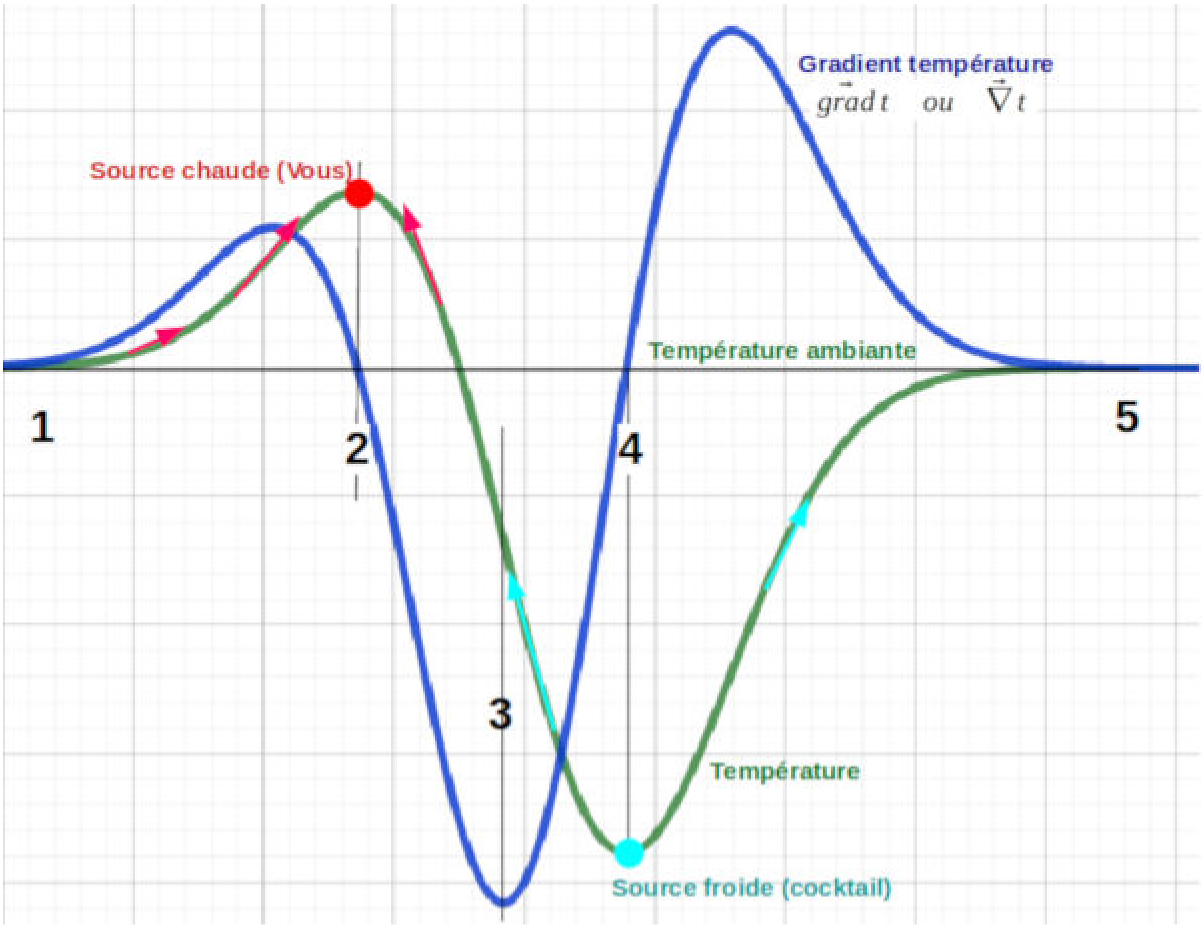
Si l'on coupe le plan "au milieu" (on vous coupe en deux!), la forme des valeurs de la température lorsque que l'on traverse la pièce où vous vous trouvez, donnera une forme de courbe comme suit :



C'est la forme à laquelle on pouvait s'attendre. Depuis derrière vous (coté gauche), plus on s'approche du lieu de votre réflexion plus cela chauffe, la température augmente. Puis le cocktail lui refroidit l'ambiance (la température chute) et, pour finir en s'éloignant vers la *droite tout redevient à la température standard de la pièce.*

PREMIÈRE ÉTAPE, LE GRADIENT

Comme nous sommes un peu fainéants (surtout moi) on va calculer le gradient de température dans la pièce seulement selon une dimension (x en l'occurrence). Selon la définition même du gradient, dans le cas d'une dimension le gradient correspond à la variation de la grandeur étudiée soit sa [dérivée] (ça c'est pour les matheux). Donc le gradient de température c'est la quantité de variation de la température selon une direction et un sens, cela en tout lieu de la zone étudiée. Voici la courbe correspondante :

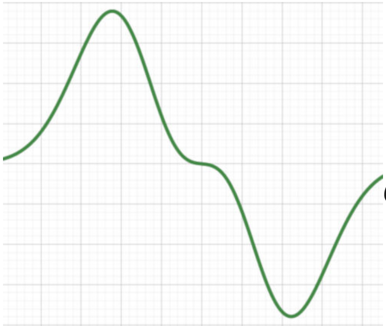


La forme de la courbe gradient est la ligne bleue. Si cette courbe vous interpelle, je vous conseille de regarder l'annexe en fin d'article. Quelques remarques aux points particuliers :

1.- le gradient est nul car la température est stabilisée à la température ambiante
2.- le gradient est également nul car au niveau de la source chaude il n'y a pas de variation

de température, vous réfléchissez constamment. □

3.- Pourquoi le gradient a-t-il, en ce lieu, son intensité (sa norme, valeur absolue) la plus élevée ? C'est un peu un cas particulier, il faut imaginer le cas d'une source chaude et d'une source froide plus éloignée quelle serait la forme de la courbe de la température ?



Comme vous pouvez le constater, il y aurait stabilisation de la température entre les sources, donc un gradient de température nul. Dans notre cas les sources sont proches et donc le gradient passe rapidement "de gradient vers le chaud à un gradient vers le froid". La distance pour ce changement de température est très court donc le gradient élevé. Quelque part ce point se trouve à égale distance des deux sources.

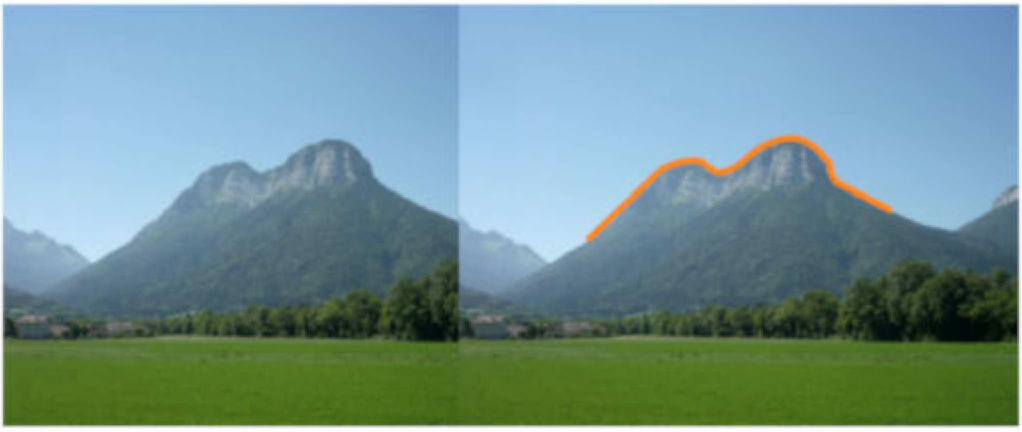
4.- C'est le cas symétrique au point 2, mais au niveau de la source froide

5.- Retour à une température ambiante constante, donc un gradient nul.

DEUXIÈME ÉTAPE, LA DIVERGENCE

C'est bien beau tout cela, on a défini le gradient du champ de température, mais ce qui nous intéresse (enfin Vous je ne sais pas □) c'est le Laplacien de ce bazar (oui, Vous, le cocktail et la température □).

Nos amis les mathématiciens, nous disent que si vous prenez la divergence d'un gradient vous trouverez le Laplacien ! Prenez-le comme argent comptant et en fait ce n'est pas le plus important, c'est une méthode pour trouver ce fameux Laplacien. Mais que cherchons-nous avec ce Laplacien ? Je vous ai déjà suggéré la réponse, la courbure du champ scalaire. Ohhhhhhh, désolé, je n'avais pas compris ! Vous ne buvez pas en pensant aux solutions pour sauver notre pauvre monde, vous vous félicitiez pour l'exploit que vous venez d'accomplir ! Bravo pour votre rude marche le long de l'arête de la montagne, le cocktail est mérité !



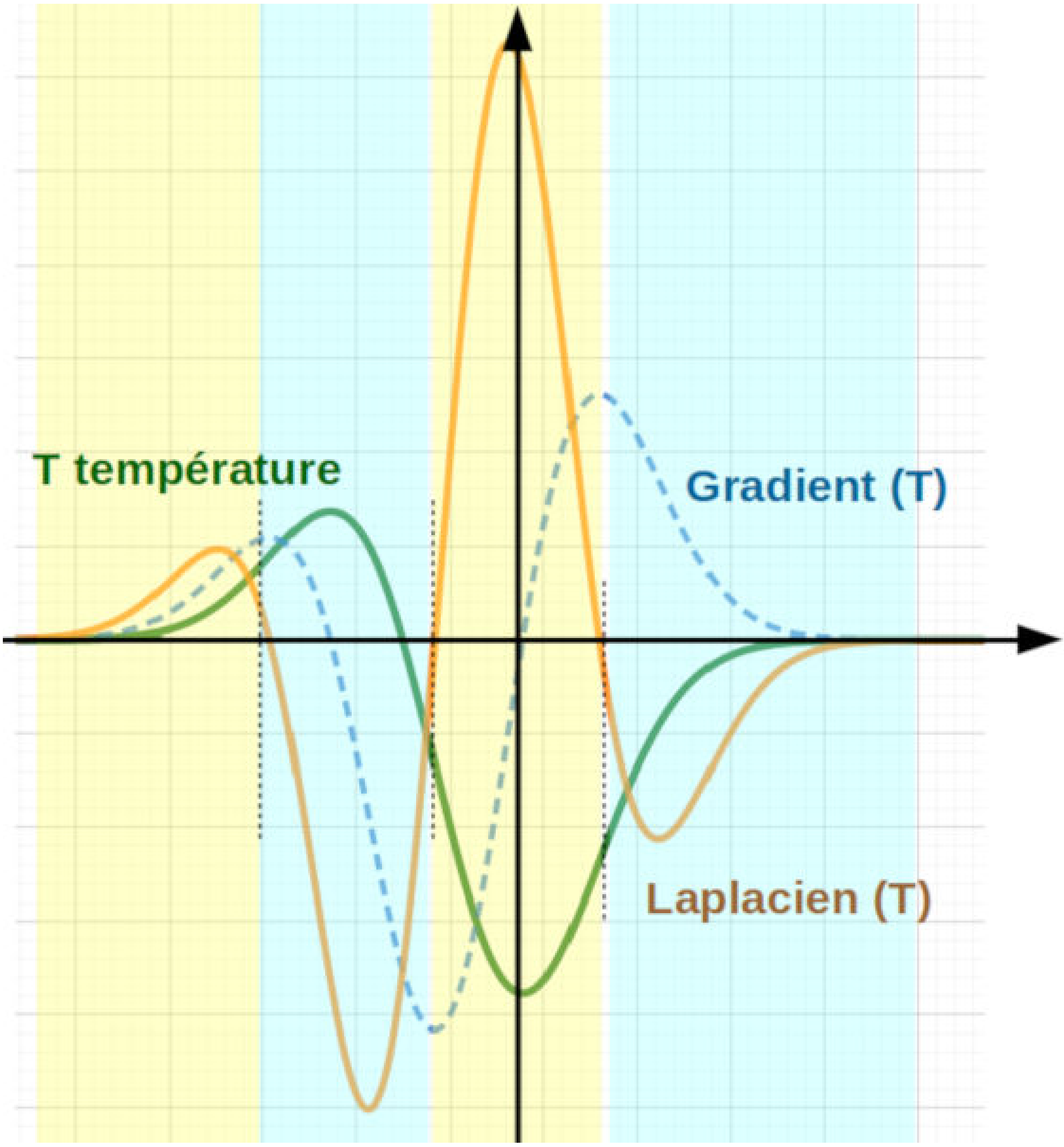
Vous partez plein d'énergie car en ce début de randonnée, le Laplacien est nul ! ? ! Ehh oui, la montée est plate, au sens des mathématiciens, car c'est bien connu ils ne font pas de course de montagne ! Ce n'est pas plat pour un montagnard car "plat" est synonyme d'horizontal pour lui. Mais sur cette portion, la pente est régulière, donc pas de changement de montée, c'est "plat" dans le sens "pas de variation". Le Laplacien indique si votre chemin est en pente régulière (1 et 6 donc Laplacien nul), autour d'un sommet (2 et 4, Laplacien négatif) ou dans une vallée (3 et 5, Laplacien positif).

Et que vient donc faire la divergence dans ce truc ? C'est seulement un moyen de calculer le Laplacien à partir du gradient, sans plus. Bref, d'un champ scalaire (altitude ou température comme dans les exemples) il est simple de calculer le gradient de ce champ puis de définir la divergence du gradient.

$$\Delta t = \operatorname{div} \overrightarrow{grad}\, t \quad ou \quad \nabla \cdot \vec{\nabla}\, t$$

Donc revenons à nos moutons (Vous, votre cocktail et vos pensées), il nous faut définir la divergence du champ de gradient de la température pour obtenir en fin de compte le

Laplacien du champ de la température. La divergence d'un gradient unidimensionnel cela correspond à la dérivée du gradient. Ou plus simplement dit le Laplacien est la double dérivée du champ scalaire en unidimensionnel.



On constate que dans la zone jaune le Laplacien est positif, soit la courbure du champ scalaire de la température "en creux" (style vallée) et dans la zone bleue c'est le contraire la courbure négative soit une courbure en "en bosse" (style sommet).

Voici une présentation relativement intuitive du Laplacien, c'est en anglais mais les images se "comprennent" aussi en français ! Il y a aussi un peu de mathématique, courage 🙂 je pense que cela vaut les 5'30".

J’espère que vous avez une vision de ce que représente ce Laplacien. Voici pour terminer quelques adresses intéressantes (attention il y a des maths) pour parfaire vos idées.

- *Rappel ou résumé sur les opérateurs mathématiques différentiels.*
- *Jolie présentation avec visualisation.*
- *Présentation mathématique des opérateurs.*
- *Autre présentation des opérateurs mathématiques différentiels.*

Conclusion

J’espère que ce survol vous aura permis de ne plus trop paniquer à la vue des opérateurs mathématiques différentiels et si vous avez les idées plus claires après cette lecture (concernant les opérateurs mathématiques, le reste de votre vie “ne nous regarde pas”), j’en suis heureux !

Annexe

DÉFINITION FORME

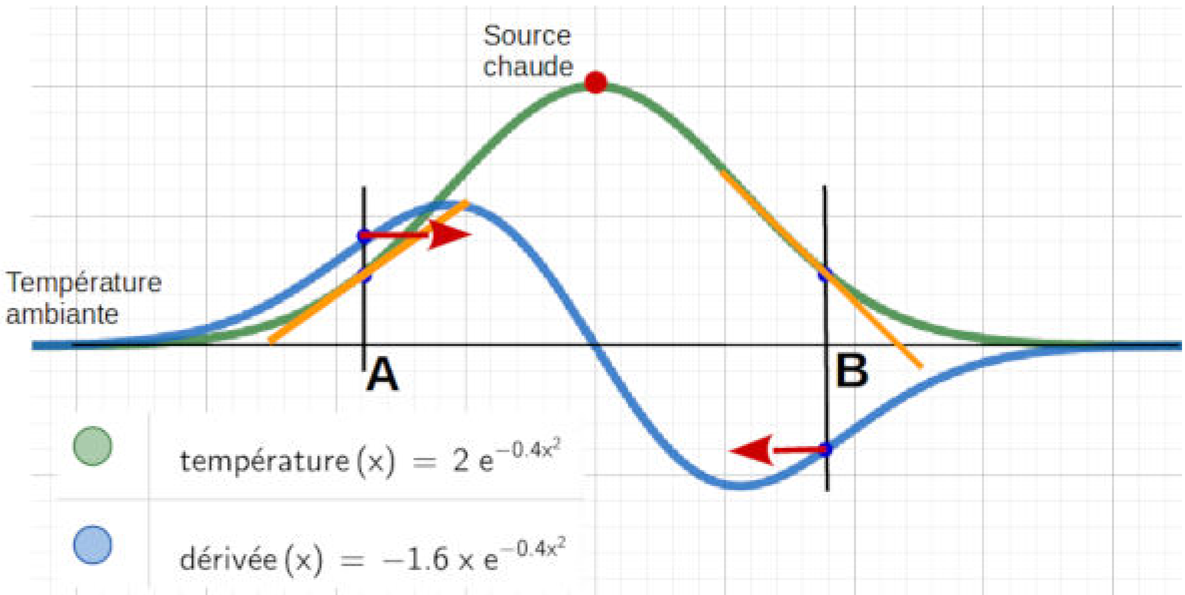
Pour définir le champ de la température j’ai pris une équation mathématique sans tenir compte de la physique, c’est seulement une forme qui pourrait coller à la réalité sans se soucier de la véritable répartition de la température. La formulation de la température suit une courbe exponentielle simple. J’admets que ma paresse m’a guidé dans ce choix, les dérivées sont simples. Pour ma défense je dirais que “la paresse est le plus grand moteur des progrès techniques de l’humanité”. Pour que chacun puisse se faire une idée :

GRADIENT ET DÉRIVÉE

Le gradient est souvent présenté comme la dérivée du champ scalaire ce qui est juste pour *certain cas particulier, comme un monde unidimensionnel. Mais il ne faut pas oublier que le gradient est un champ vectoriel et donc qu'en chaque point du champ scalaire de la température est associé une grandeur contenant trois grandeurs : l'intensité (la norme), la direction, le sens. Donc dans un monde multidimensionnel gradient et dérivée ne sont plus identiques.*

Prenons un exemple : Une source de température chaude et analysons comme cela se passe pour la dérivée et pour le gradient. Si pour l'intensité cela ne pose pas de problème, c'est la représentation de la valeur de la pente de la température au point considéré. Soit la pente des droites oranges aux points A ou B dans le tracé ci-dessous. La pente définit donc la taille de la flèche qui représente le vecteur gradient au point considéré. La direction de ce vecteur est bien sûr selon l'axe horizontal, l'axe x. Le sens est défini par le signe de la valeur de la pente, positif vers la droite, négatif vers la gauche.

La courbe bleue représente l'intensité (la norme) et le sens du vecteur gradient selon l'axe des X. Bien entendu une courbe ne peut pas représenter directement un champ vectoriel.



Positionnons-nous au point A, en ce lieu nous avons une certaine température T et si nous déplaçons que ce soit à droite ou à gauche, cette température change donc premier constat le gradient de température au point A n'est pas nul. Calculer la norme du vecteur gradient en A, c'est calculer la pente de la température en ce lieu donc la dérivée de la courbe de la température. La direction est celle de l'axe x. Pour le sens, généralement le gradient de température est dirigé du froid vers le chaud. Pour les sources (point chaud) le vecteur est *dirigé vers le point chaud, tandis pour les puits (point froid), il est opposé au point. Ce qui revient dans notre cas à définir le gradient comme étant dirigé vers la source de chaleur. Au point A le sens est positif le gradient est dirigé vers le point chaud, tandis qu'au point B, il est négatif et il regarde également vers le point chaud. Les flèches rouges sont donc bien la représentation du gradient de la température.*

Voilà maintenant vous savez, le gradient est similaire à la dérivée pour un monde unidimensionnel, mais cela change en bidimensionnel ou bien tridimensionnel. Car les autres dimensions influencent le résultat. Pour vous en convaincre voici une vidéo (5'25" en anglais) qui visualise bien gradient.

gradient est la dérivée, oui, MAIS PAS TOUJOURS.