Opérateurs mathématiques, le retour.

L’épisode précédent

Nous avons abordé divers sujets concernant les opérateurs mathématiques de l’analyse vectorielle :

- *les grandeurs scalaires ou vectorielles*
- *les champs*
- *le gradient*

LES GRANDEURS

Les grandeurs physiques sont classées en deux groupes, celles qui peuvent être définies entièrement par une valeur, on parle de grandeur scalaire, et celles qui nécessitent deux valeurs ou plus pour être définies, on parle dans ce cas de grandeurs vectorielles

- *grandeur scalaire : la température, l’altitude, la masse, etc*
- *grandeur vectorielle : la vitesse, la force, le gradient, etc*

LES CHAMPS

Le champ d’une grandeur physique permet de traiter l’ensemble des données d’une grandeur physique répartie sur une zone, un temps, etc. Une relation mathématique entre cette grandeur et la répartition est souhaitable pour pouvoir travailler avec ce champ.

Exemple typique : le champ des températures d’un pays (météo du jour)

Les opérateurs mathématiques

LE GRADIENT

Vu dans l’épisode précédent. Le premier opérateur mathématique introduit fut le gradient. C’est la formalisation d’une variation d’une grandeur physique (scalaire ou vectorielle), par exemple la variation de la température dans une pièce, le gradient de température dans une pièce sera défini par selon un repère cartésien :

$$\vec{\nabla} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

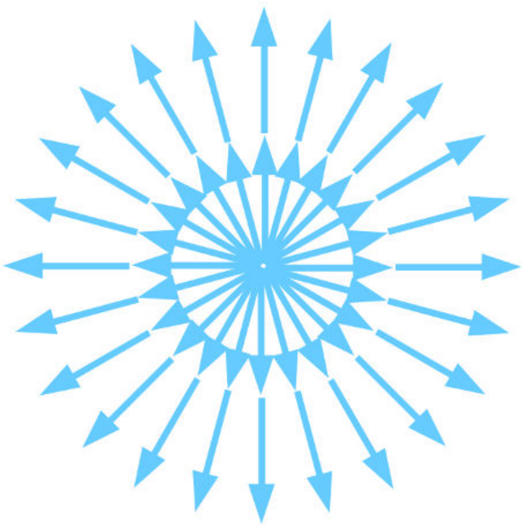
Remarquez que si la grandeur étudiée est un scalaire, cela ne change pas la nature du gradient, il sera vectoriel. L’opérateur “nabla ∇” est la représentation du gradient.

Pour ceux qui veulent plus d’explications, voici une vidéo (7’45”) de présentation du gradient, attention à la fin il y a des maths, vous êtes prévenu

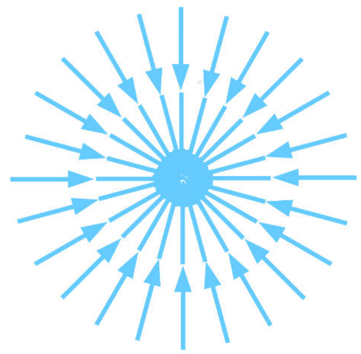
La divergence

Dans les opérateurs mathématiques la divergence est un cas un peu particulier car, comme nous le verrons, cet opérateur ne définit pas de nouveau champ vectoriel. Si l'on regarde la définition du dictionnaire (l'internaute), on associe au terme divergence celui d'écart, de différence. Le terme d'écart est un bon chemin pour comprendre la divergence mathématiquement. Prenons un exemple, si l'on observe un jet d'eau, les gouttes tendent à s'éloigner les unes des autres, elles sont divergentes.

Un autre exemple serait la vision de l'expansion d'un gaz (une explosion) ou l'inverse sa compression. Dans ces exemples on peut comprendre instinctivement qu'une valeur définissant la vitesse, la quantité d'expansion permet de qualifier la variation du champ vectoriel. C'est justement le rôle de la divergence : mettre une valeur à l'écartement de chaque point du champ vectoriel par rapport aux autres.



On peut associer la divergence mathématique à une source de quelque chose par la représentation suivante. Chaque flèche présentant le parcours ou la vitesse d'un élément de la grandeur étudiée. On remarque, sans grand besoin d'explications, que l'écart entre les divers éléments augmente. De plus et la forme de la représentation présente les aspects d'une source (pensez à de l'eau par exemple). Ce schéma n'est pas sans rappeler certains schémas du gradient. Ce n'est pas une démonstration mathématique mais cela cerne assez bien le sujet de l'opérateur mathématique de la divergence.



Si on imagine le cas d'un puits (absorption de quelque chose) comme le trou de la baignoire, on peut considérer (sans tenir compte de la rotation de l'eau, qui en passant, ne provient pas de l'effet de Coriolis comme souvent expliqué, j'y reviendrais peut-être), le puits comme une "divergence négative".

Tout cela n'est très rigoureux mathématiquement parlant, mais mon propos est de vous faire "toucher" ce que peut représenter ces opérateurs mathématiques. Les grandes démonstrations vous en avez plein Internet que ce soit en vidéo ou des sites spécialisés.

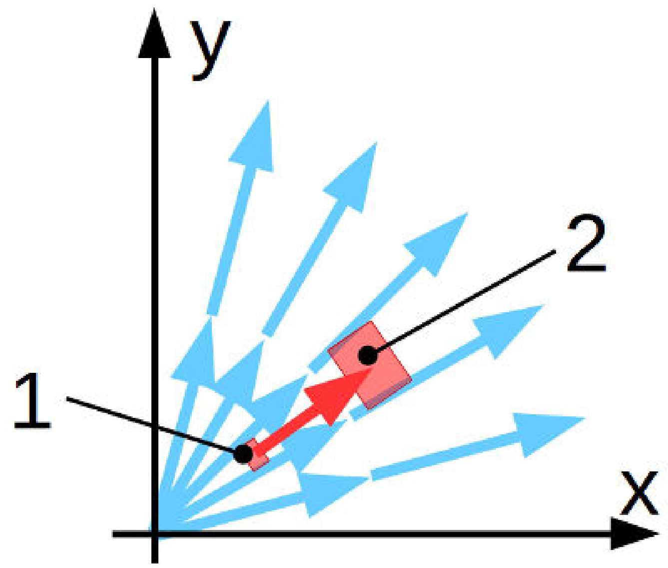
Vous avez peut-être remarqué que les exemples présentés sont toujours ceux de grandeurs vectorielles, ce sont toujours des champs vectoriels, ce qui normal parce la divergence exprime un certain état d'un champ vectoriel.

L'opérateur mathématique "divergence" exprime "l'écartement" d'un champ vectoriel.

Divergence : on crée un champ scalaire à partir d'un champ vectoriel.

DIVERGENCE DANS LE PLAN

Pour modéliser cela, on va faire comme avec le gradient, on va résonner dans le plan. Comme j'ai déjà introduit un exemple de divergence (source), on reprend cela de plus près.



La quantité (surface) d'éléments au point 1 est le même qu'au point 2, car il y a simplement une augmentation de la surface disponible mais pas de la quantité d'éléments. Ce qui revient à dire que les éléments s'écartent les uns des autres. La valeur de cet écartement est représentée la divergence. Donc, on peut chercher à estimer la "différence de surface" pour exprimer la divergence. Pensez à la définition du dictionnaire (écart, différence)!

Pour suivre cette partie, si vous ne vous souvenez pas de la notation différentielle, je vous propose une petite révision [ici](#) mais c'est pas obligatoire !

Dans notre schéma, la variation de surface représente la variation du champ vectoriel et l'expression de cette variation est, somme toute, l'augmentation de surface selon l'axe X additionnée de l'augmentation selon l'axe Y. Pour exprimer cela, on utilise généralement les dérivées qui correspondent à la variation d'une grandeur, fonction, élément selon une quantité "très très très petite" (infinitésimale) d'une variable. Si l'on s'intéresse à une surface dans le plan, l'élément de surface S est la grandeur et les valeurs X ou Y sont les variables. L'expression de la variation de surface aurait l'allure suivante :

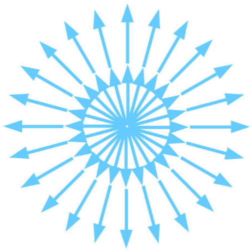
$$variation\ surface = \frac{dS}{dx} + \frac{dS}{dy}$$

En fin d'article, vous avez la démonstration mathématique de la variation de surface. Bon maintenant que l'on a notre expression de la variation de surface, revenons à ce qui varie effectivement, c'est le champ vectoriel. La variation du champ vectoriel, $\vec{A}$ par exemple, s'exprime de la même manière que la surface. La seule chose que l'on ignore, c'est la forme de cette variation (qui peut dépendre seulement de X ou seulement de Y ou de X et Y). Donc, pour généraliser, on utilisera les dérivées partielles dans la définition de la divergence dans le plan.

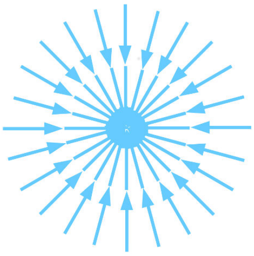
$$\mathrm{div}(\vec{A}) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}$$

On voit que pour chaque point du champ vectoriel $\vec{A}$ peut lui être associé une valeur scalaire (la divergence en ce point), ce qui, après tout, crée un champ scalaire.

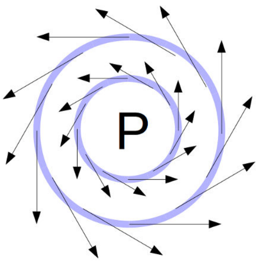
CAS PARTICULIERS



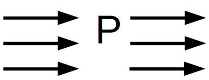
cas de divergence positive, le flux "sort". Expansion.



cas de divergence négative, le flux “entre”. Compression.



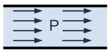
cas de divergence nulle, le flux tourne autour du point. Tourbillon.

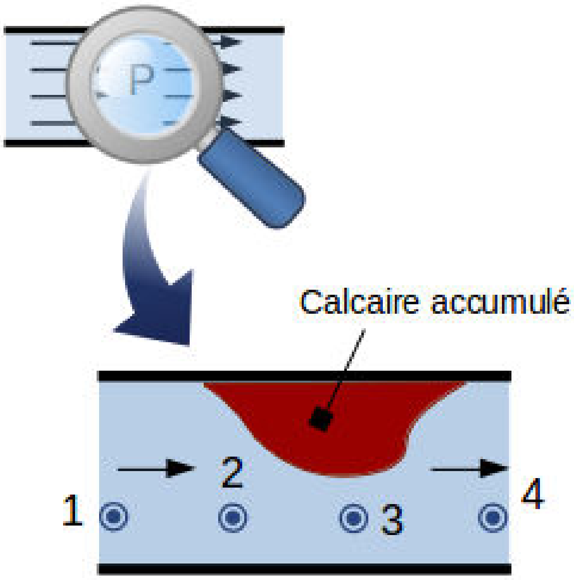


cas de divergence nulle, le flux entrant compense le flux sortant.

Entrée=Sortie.

EXEMPLE PHYSIQUE

Reprenons le dernier cas présenté  *et analysons le champ de vitesse du fluide autour du point P. Pour simplifier notre analyse, nous admettrons que notre fluide est incompressible, que sa vitesse est une vitesse moyenne et que les pertes de charges sont nulles. Schématisons un peu notre propos, un tuyau avec un fluide qui s'écoule :*



Comme vous le voyez ce tuyau n'est pas "propre en ordre", il y a du calcaire qui oblige le fluide à changer de vitesse pour maintenir la conservation du débit (conservation de l'énergie ou un écoulement à énergie constante). Si l'on calcule la divergence au point 1 et la divergence au point 4, ce sera la même. Ceci pour dire que si l'on regarde de loin le tuyau (de telle façon que le calcaire n'est plus observable) la divergence est nulle ; le flux entrant est égal au flux sortant. Le champ de vectoriel de vitesse est le même au point 1 et au point 4, donc divergence nulle comme si les deux points sont en fait un seul point, le point P.

Pour le calcul de divergence au point intermédiaires 2 et 3, il faut avoir une idée de la forme du calcaire accumulé. En fait c'est la variation de section qui nous intéresse car si l'on veut exprimer la conservation de la masse entre les points 2 et 3, il est nécessaire de connaître les sections aux points considérés :

$$v_2 \cdot S_2 = v_3 \cdot S_3$$

v étant la vitesse et S la section.

Ce que l'on peut écrire sous la forme ci-dessous et l'on constate que la vitesse changera en fonction du rapport des sections.

$$v_3 = v_2 \cdot \frac{S_2}{S_3}$$

En fait pour nous qui résonnons dans le plan, ce n'est pas une section mais plutôt la largeur du passage libre pour notre fluide. Ceci n'étant pas important, car le raisonnement est le même.

Ce que je veux montrer c'est que l'intensité du champ vectoriel des vitesses des particules de notre fluide, change entre les points 2 et 3. Ceci induit un changement de la valeur de la divergence puisque la définition de la divergence d'un champ vectoriel est la mesure de variation de ce champ. Il y a variation du flux vectoriel (du flux de vitesse) donc il y aura une variation de la divergence.

CAS D'UNE BOÎTE FERMÉE

Si l'on observe la divergence d'un fluide, champ de vitesse des molécules à l'intérieur de la boîte. Imaginez que la chope de bière est fermée, dans cette configuration, on peut dire :

Qu'il n'y a pas de fluide entrant et pas de fluide sortant, donc la divergence globale est nulle.

Si l'on observe à l'intérieur de la chope on verra des effets de divergence positive, les molécules s'écartent en changeant de vitesse (divergence "source") et des autres endroits ou les molécules se rapprochent en changeant de vitesse, on parle de divergence négative (convergence) ce qui simule une divergence "puits". Globalement la somme des divergences sera nulle.

EXEMPLE MATHÉMATIQUE

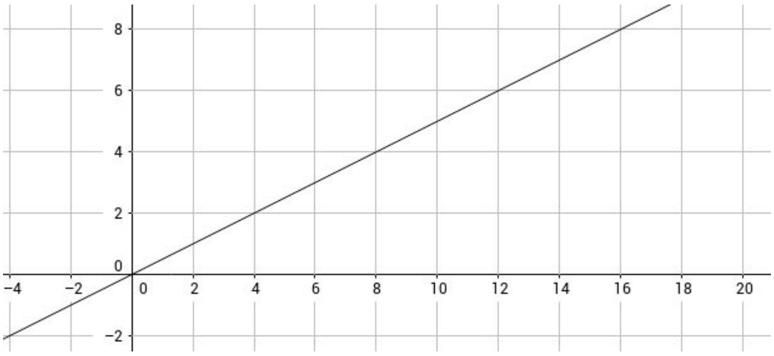
Nous allons prendre simplement une fonction arbitraire pour le champ vectoriel et chercher sa divergence. C'est purement un exercice mathématique, le champ vectoriel "F" est défini par : $\vec{f}(x, y) = x^2 \vec{i} + x \cdot y \vec{j}$

Pour rappel : le vecteur i est parallèle à l'axe X et le vecteur j parallèle à l'axe Y. Donc la divergence sera, selon la définition du champ vectoriel :

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial x \cdot y}{\partial y} \vec{j}$$

En effectuant la dérivation nous obtenons la divergence du champ F pour tous les points (x,y). Ce qui définit le champ scalaire de la divergence. Cette valeur de la divergence peut être représentée par une droite avec X comme abscisse (horizontal) et la divergence du champ F en ordonnée (verticalement). Dans ce cas-là la divergence ne varie que selon les X.

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial x^2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial x \cdot y}{\partial y} \vec{j} = 2 \cdot x \, \vec{i} + x \, \vec{j}$$



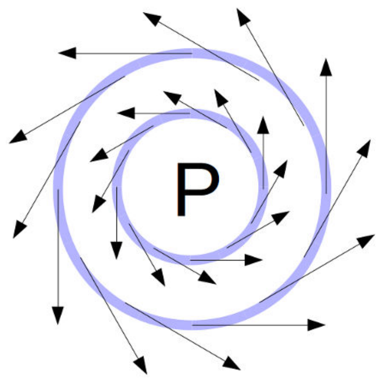
MÉTAPHORE

On peut dire que la divergence est la “densité du champ vectoriel”. La densité du flux vectoriel. Elle intervient pour définir la conservation d’une grandeur en milieu continu.

Le rotationnel

Je pense maintenant que vous êtes un peu habitué avec ces notions mathématiques et leur représentation physique. Parmi les opérateurs mathématiques le rotationnel est peut-être le plus difficile à appréhender. Comme son nom l’indique le rotationnel donne une information sur le champ vectoriel étudié. Tourne-t-il ou ne tourne-t-il pas ?

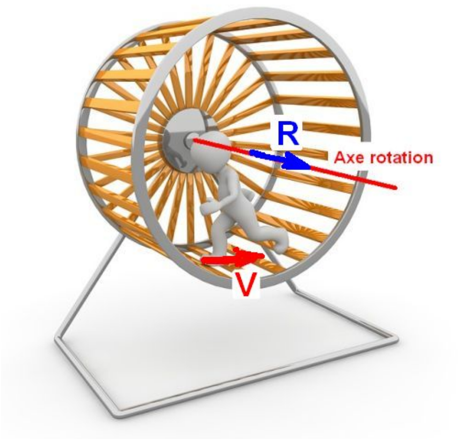
Le rotationnel est un champ vectoriel définit à partir d’un champ vectoriel.



Si l’on regarde un champ vectoriel, comme le mouvement d’élément autour d’un point P. Si les vecteurs vitesses (champ vectoriel de vitesse) des éléments autour de P sont comme le schéma ci-contre, on comprend instinctivement que les éléments tournent autour de P, donc le rotationnel du champ de vitesse des éléments est non nul.

Ce qui moins facile à comprendre c’est que la représentation de cette rotation se fera par une flèche qui sort de l’écran. Cette représentation du vecteur rotationnel dont la direction représente l’axe de rotation et sa longueur l’intensité (dans notre cas la vitesse) de la rotation.

Voici une “image” de la chose :



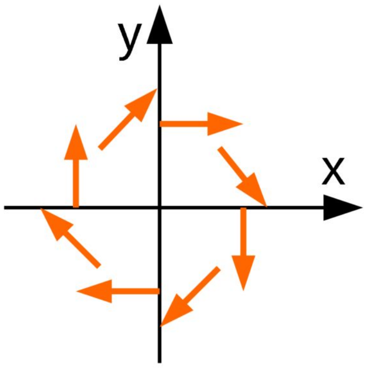
L’axe de rotation donne la direction du vecteur rotationnel R et la longueur de ce vecteur indique la vitesse V du mouvement autour du point considéré. Pour illustrer ce rotationnel, je vous conseille de jeter un coup d’oeil à cette petite vidéo de [cette page web](#).

Un champ vectoriel à rotationnel nul est souvent dit "irrotationnel".

DANS LE PLAN

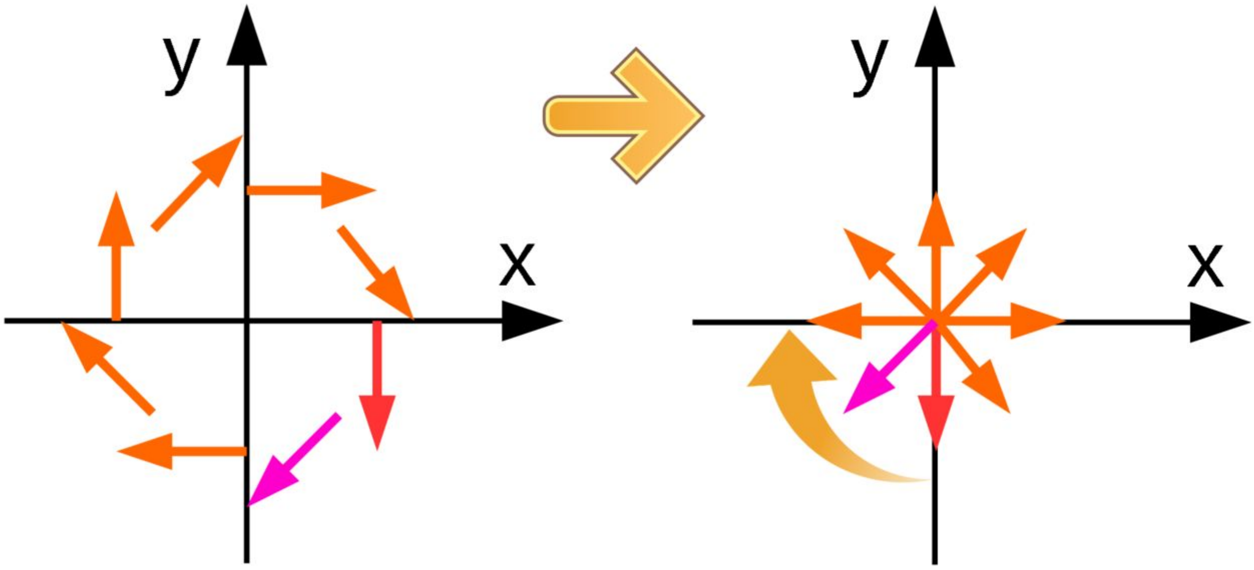
Pour un champ vectoriel plan, par exemple le mouvement d'une onde à la surface de l'eau, le ruissellement de l'eau sur un toit, etc, nous aurons donc le champ vectoriel définit selon les axes X et Y. La direction du vecteur rotationnel en un point sera lui sera perpendiculaire au plan. Le champ des vecteurs rotationnels, le champ rotationnel, "sortira/entrera" dans le plan considéré.

Soit un champ vectoriel "A" tournant dans le sens des aiguilles d'une montre : $\vec{A} = y \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$

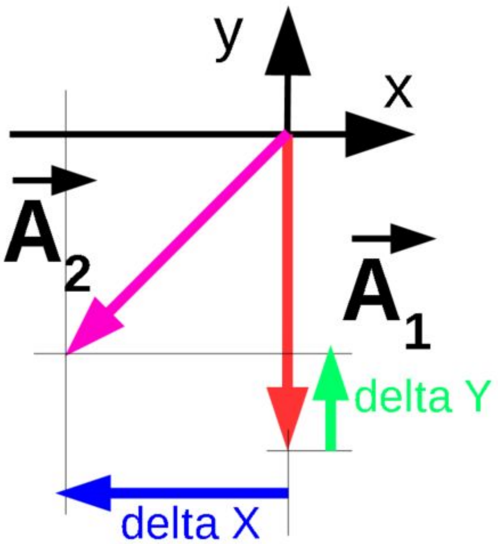


Vous avez la définition de ce champ sous forme de schéma et d'équation mathématique. Je vous laisse retrouver l'un par rapport à l'autre, sauf si vous me faites confiance .... ce que je vous déconseille !

Autre façon de se représenter ce champ vectoriel, en faisant un petit exercice de visualisation nous pouvons "voir le champ tourner". Imaginez que vous pouvez ramener au centre (origine), chaque vecteur. Vous verrez en fin compte un vecteur qui "tourne", ce qui illustre bien la notion de vecteur tournant, de champ de vecteurs tournants, de champ vectoriel tournant, de champ à rotationnel non nul.



Regardons maintenant plus en détail ce qui se passe entre le vecteur orange et le vecteur rose



Le vecteur A tourne autour de l'origine, donc il passe par l'état A_1 puis A_2. "delta X" signifie la variation du vecteur A selon l'axe des X. La variation d'orientation peut être définie par les "delta X" et "delta Y" entre A_1 et A_2. Le rotationnel sera alors comme la somme de ces différences, soit

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = delta\,X + delta\,Y$$

Maintenant si l'on fait varier "très petitement" X (je pense maintenant que vous me voyez arriver avec des différentiels), sa représentation est "delta Y". La variation "delta X", elle, ne dépend, pour des variations très petites de X et Y, que de la variation de Y.

$$delta\,X = -\frac{\partial \overrightarrow{A}_x}{\partial y} \qquad delta\,Y = \frac{\partial \overrightarrow{A}_y}{\partial x}$$

Selon la convention de notre schéma, "delta X" est négatif tandis que "delta Y" est positif. Pour terminer cette définition du rotationnel 2D (champ vectoriel dans le plan X,Y), nous aurons :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial \overrightarrow{A}_x}{\partial y} - \frac{\partial \overrightarrow{A}_y}{\partial x}\right)\vec{k}$$

Pour rappel i, j et k sont les vecteurs dans la direction des axes cartésiens, respectivement les axes X, Y et Z. Je vous laisse regarder la définition du rotationnel dans un espace à trois dimensions, Wikipédia par exemple. Mon but étant d'uniquement vous faire "visualiser" ce qu'est cet opérateur mathématique appelé rotationnel.

Remarque : pour un champ vectoriel 2D tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, conventionnellement le vecteur rotationnel est dirigé comme s'enfonçant dans le plan (opposé au vecteur k représentant l'axe Z).

Conclusion

Bien sûr qu'il y a encore beaucoup à dire sur ces opérateurs mathématiques mais mon propos est vous faire faire un survol de "à quoi sert" ces opérateurs mathématiques différentiels.

Vous trouverez beaucoup d'informations, démonstrations et exercices sur Internet par exemple ici, ou ici. Regardez également sur YouTube, souvent plus simple et visuel.

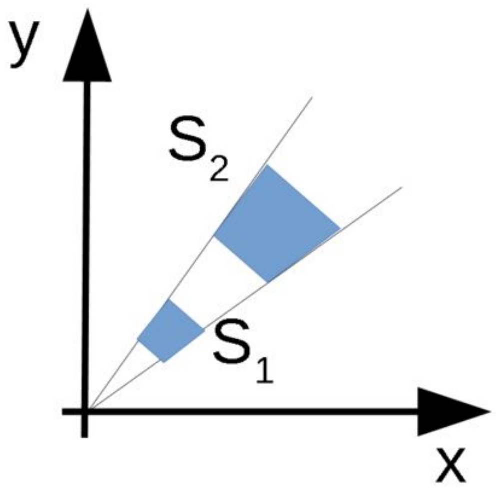
Gradient, Divergence et Rotationnel sont maintenant des mots ou des symboles mathématiques qui ne doivent plus vous effrayer. Ces opérateurs mathématiques ne vous sont pas aussi familiers que "plus" ou "moins" mais presque ....

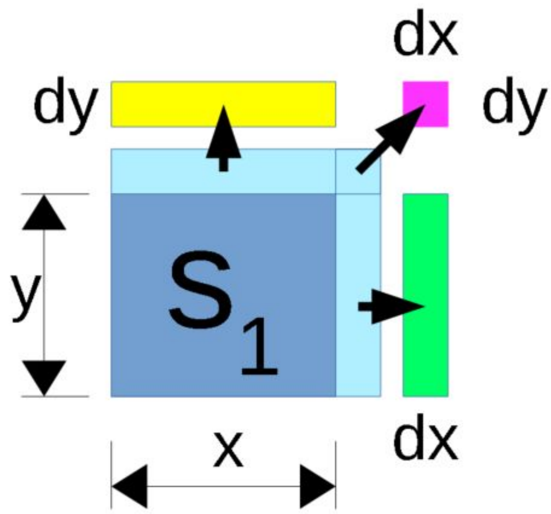
j'espère  *!*

ANNEXE

Variation de surface

Cette partie est juste pour présenter le parallèle entre la divergence et l'augmentation de surface. Sur le schéma de gauche on passe de la surface S_1 à la surface S_2. On peut représenter cette augmentation de surface par le schéma de droite. En effet l'augmentation de surface de S_1 à S_2 est l'augmentation de surface selon l'axe X additionnée de l'augmentation de surface selon l'axe Y.





Le passage de la surface S_1 à la surface S_2 peut s'écrire par : $S_2 = S_1 +$ delta S.

Que vaut delta S ? C'est l'addition des surfaces 3 surfaces de couleurs :

- *la surface verte : y dx*
- *la surface jaune : x dy*
- *la surface rouge : dx dy*

Ce que l'on peut dire c'est que dx ou dy sont des valeurs très petites, infinitésimales même ! Que dire de dx multiplié par dy ! ? négligeable vu l'échelle de x et y.

Donc en fin de compte $S_2 = S_1 +$ delta S $= S_1 + y\,dx + x\,dy + \cancel{dx\,dy}$ (négligeable). Ceci amène à écrire l'augmentation de surface (variation de surface) comme :

$$S_2 - S_1 = y\,dx + x\,dy$$

la variation de surface selon l'axe X est "y dx" et la variation de surface selon l'axe Y est "x dy". Donc :

$$S_2 - S_1 = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}$$