

# Somme et variation

*Avertissement: Les explications données ci-dessous ne sont pas d'une parfaite rigueur mathématique, néanmoins elles sont suffisamment précises pour que chacun trouve les explications et appréhendent les deux sujets de cet article qui sont :*

- la somme, l'addition
- la variation, l'augmentation, la diminution

## La somme

*Plusieurs signes permettent de représenter ce concept (celui du résultat d'une opération additive). Chaque signe (+ ,  $\Sigma$  ,  $\int$  ) a sa signification propre, mais on peut considérer qu'ils sont tous des sommes d'éléments en plus ou moins grand nombre.*

### le signe ("plus") +

*c'est le signe le plus couramment utilisé. Par exemple, si je vous dis que j'ai un ordinateur et que vous en avez un. Ensemble nous en avons  $1 + 1 = 2$ . C'est simple les maths! Dans ce cas de figure il est aisé de se représenter les 2 objets qui sont des éléments clairement définis et tangibles.*

### le signe ("somme") $\Sigma$

*ce signe est utilisé pour éviter d'écrire plusieurs signes +. Par exemple, si l'on veut savoir combien de machine à vapeur il y a dans le monde, additionner toutes ces machines avec le signe +, ce n'est pas aisé. Par contre avec le signe  $\Sigma$  c'est simple.*

toutes les machines du monde  
 $\Sigma$  (machines à vapeur)

## le signe (“intégrale”) $\int$

Ce signe permet d'introduire la notion d'addition de très petites parties, qui peuvent être virtuelles, pour obtenir un tout. Par exemple pour définir le volume d'eau d'une chaudière, on additionne toutes les particules d'eau dans cette dernière. Ce qui se notera comme suit :  $\int dv$  que l'on interprétera par la somme de tous les petits éléments d'eau «  $dv$  ».

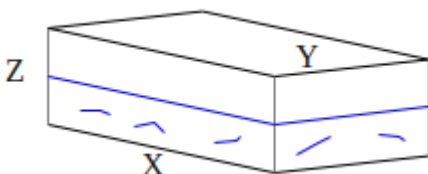
En mathématique la notation “ $d...$ ” signifie que l'on considère un élément infinitésimal (très très petit). C'est une valeur très petite, qui tend même vers zéro, mais c'est une valeur algébrique.

La notion d'élément infinitésimal peut être imagée en pensant au carrelage de votre cuisine (tant pis pour ceux qui n'ont pas de carrelage! ... ou de cuisine). La surface de votre cuisine correspond à la somme des éléments (carreaux) de votre cuisine. Si vos carreaux sont grands, le résultat sera imprécis, si vous imagez votre cuisine avec des carreaux style mosaïque vous obtiendrez un meilleur résultat, car les dimensions de votre élément de référence est petit vis-à-vis de l'élément final (la surface de votre cuisine).

Bien revenons aux mathématiques et imagez cette fois que vos carreaux ont une dimension qui tend vers zéro, vous obtenez un  $d(\text{carreau})$  et vous en ferez la somme !! Soit, la surface de votre cuisine :  $\int d(\text{carreau})$

### Cas concret

Ce qui précède permet d'écrire en partant d'une chaudière de machine à vapeur rectangulaire et qui n'est qu'à moitié remplie :



Comme vous n'avez pas d'élément de référence autre que celui de l'infiniment petit, vous écrirez avec la lettre  $V$  représentant le volume d'eau recherché :

$$V = \int dv$$

mais vous savez que  $dv$  correspond à votre élément de référence et physiquement c'est une infinitésimale petite boîte rectangulaire. Si les dimensions de votre chaudière sont  $X$ (longueur),  $Y$ (largeur),  $Z$ (hauteur) vous pouvez facilement imaginer que votre minuscule élément de référence aura les dimensions  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ .

Le volume d'une mini boîte rectangulaire  $dv$  est donc le produit  $dv = dx * dy * dz$  que l'on mettra dans la formulation de départ soit :

$$V = \int dx * dy * dz$$

On comprend instinctivement que si je compte les carreaux en long puis en large et enfin dans la hauteur, j'obtiendrai la même somme en commençant par la largeur puis la hauteur pour finir par la longueur. Donc en résumé que l'on écrive

$$V = \int dx * dy * dz \text{ ou } V = \int dx * \int dy * \int dz \text{ c'est pareil !}$$

Que signifie concrètement  $\int dx$  : c'est la somme de tout les carreaux sur la longueur  $X$  (si vous êtes jardinier vous aurez  $dx$  correspondant au décimètre, si vous êtes mécanicien  $dx$  correspond au dixième ou centième de mm, et si vous êtes horloger  $dx$  ....) pour nous c'est pas important et l'on dira simplement que  $X = \int dx$  . Pour être plus précis

$$X = \int_0^X dx$$

qui signifie la somme des  $dx$  de 0 à  $X$ . C'est comme la mesure sur une règle graduée, vous placez le 0 sur un coin et vous regardez le chiffre sur l'autre coin. En mathématique on note cela comme suit :  $X-0$  et qui correspond à  $|X-0| = X$ . La partie entre les deux traits verticaux indique qu'entre le début et la fin de la somme il n'y a pas de discontinuité dans la longueur examinée (intervalle) et donc que l'on peut se concentrer uniquement sur les extrémités de cette longueur (si vous ne comprenez pas bien cette notion, c'est pas important, nous l'aborderons lors d'une autre article).

Pour revenir sur notre recherche du départ nous aurons donc de la même façon  $Y$  et  $Z$ .

$$Y = \int dy \text{ et } Z/2 = \int dz \text{ Eh oui, rappelez-vous votre chaudière n'est remplie qu'à moitié ! Pour}$$

être clair:

$$\int_0^{Z/2} dz = |Z/2 - 0| = Z/2$$

En résumé, nous aurons :  $V = \int dx * \int dy * \int dz = X * Y * Z/2$

ce qui fait encore bien pompeux et mystérieux mais qui ressemble furieusement à :

*Volume eau chaudière = longueur \* largeur \* demi-hauteur*

*Voilà, voilà ... pour la somme, passons à la variation.*

## La variation

*Comme pour l'addition, nous avons plusieurs signes ou grandeurs pour illustrer une variation. Elle nous permet de mieux comprendre, au moins de s'imaginer un phénomène. Par exemple il y a des grandeurs qui caractérisent un système qui nous semblent évidentes, naturelles, à telle point que l'on ne pense même plus qu'elles ne sont que des variations. Voici 3 exemples concrets : Pensez à la vitesse de votre véhicule, au niveau de sonore de votre voisin, à l'inflation lors de vos achats. Il y en aurait bien d'autres. Pour définir ces variations nous avons les signes suivants à notre disposition :*

*"-" c'est le signe de la soustraction, de la différence*

*"/" c'est le signe de la division, de la proportion.*

*Pour bien se mettre d'accord et si vous ne l'êtes pas (d'accord) vous avez la possibilité de le manifester en nous écrivant via les commentaires de la [page de bienvenue](#) et étaler votre réprobation.*

*Revenons aux exemples précédents :*

*la vitesse d'un véhicule, c'est le changement de position de ce véhicule pendant un laps de temps défini. Cette vitesse est calculable avec les signes ci-dessus :*

*vitesse = différence de position / laps de temps*

*différence de position = position au début du laps de temps - position à la fin du laps de temps = distance*

*Afin de simplifier l'écriture nous noterons*

*vitesse = distance / temps*

*Le niveau sonore, c'est équivalent mais dans ce cas, le phénomène physique est une différence de pression d'air. En fait ce qui vous dérange c'est plus précisément l'intensité sonore de votre voisin. Cette grandeur est dépendante de la puissance du son et de la surface qui reçoit ce son. Sans rentrer dans une démonstration physique, la puissance étant une énergie par unité de temps, et dans notre cas, cette énergie pouvant être traduite en termes de vitesse du son et de la différence de pression d'air, nous trouverons que votre voisin vous dérange parce qu'il fait du bruit ! ... et accessoirement :*

*intensité sonore = (différence de pression \* différence de pression) / (2 \* vitesse du son \* densité)*

*L'inflation, c'est la hausse des prix (vous devez connaître !) On définit une série d'objets et de services dont on observe la différence des prix sur une période de temps.*

*inflation = (différence coût du panier de la ménagère) / période de temps*

*J'espère qu'avec ces exemples vous avez saisi ce que l'on entend par variation. Non ? Ben, alors je ne sais pas quoi faire ! Comment ? J'ai parlé de la variation comme modèle et j'ai pris des exemples avec des différences pendant un laps de temps, donc je ne vous ai pas parlé de la modélisation mathématique des variations !*

*Si vous, vous avez compris c'est bien, mais moi, j'ai rien compris à cette diatribe.*

*On résume cette affaire :*

*vitesse = distance / temps*

*intensité sonore = fonction ( pression / vitesse son )*

*inflation = coût / temps*

Les termes :

- *laps de temps, période de temps, temps de déplacement (vitesse du son) ce sont tous des éléments définis comme une différence de temps.*
- *distance, pression, coût sont également une différence.*

*On constate donc que ce que nous avons défini comme variation est une relation de différence. Je ne suis pas un expert en français, mais avec le terme différence j'imagine quelque chose de fixe, tandis que le terme variation (comme son nom l'indique) quelque chose qui varie. On peut dire que la différence est un cas particulier de la variation.*

*Donc c'est vrai, je ne vous ai pas encore vraiment présenté la modélisation mathématique de la variation, la voici !*

## La modélisation mathématique

*Pour vraiment aborder cette modélisation, je vais prendre comme fil conducteur la compression (tiens encore un de ces termes que l'on utilise sans penser « variation ») dans le cas d'un vérin par exemple.*

*compression = pression / temps*

*ou plus précisément écrit*

*compression = différence de pression / différence de temps*

*Comme la variation est "une différence qui varie", on souhaite connaître très souvent la valeur de la compression. Il faut donc que la différence de temps soit très petite. Donc en reprenant la notation des éléments très petit, on peut écrire :*

*compression = différence de pression / dt*

*dt étant un élément infinitésimal de temps*

*Mais si on considère un élément infinitésimal de temps, il y a de forte chance pour que la différence de pression soit aussi infinitésimale, donc il est correct d'écrire :*

compression =  $dp / dt$  avec

$dp$  élément infinitésimal de pression

Dans le cas de la compression d'un gaz, la pression est fonction de sa température et de son volume (le volume d'un gaz, c'est le volume dans lequel se trouve ce gaz). Ceci revient à dire que la compression dépend de plusieurs paramètres (temps, volume, température,...).

Pour représenter ce cas de figure, en mathématique on écrit comme suit :

compression = fonction ( $\partial T / \partial V * \partial t$ )

j'ai mis le terme "fonction" car la compression n'est pas simplement directement le rapport de la Température, du Volume et du temps.

Le signe  $\partial...$  indique que la fonction dépend de plusieurs paramètres liés les uns aux autres simultanément. C'est comme le  $d...$ , mais un tout petit peu différent

Dans le cas d'un gaz parfait, "on sait" que le rapport  $\frac{\text{pression} \cdot \text{Volume}}{\text{Température}}$  est constant. (Croyez-moi sur parole 😊, c'est juste pour la démonstration mathématique !). Ce qui revient à dire que la pression est proportionnelle au rapport Température/Volume. Comme ce qui nous intéresse c'est la différence infinitésimale de ce rapport, donc on écrit ceci comme cela :  $d(T / V)$ . Si l'on retourne au cas qui nous passionne (oui, oui, oui .... ça c'est la méthode Coué), on arrive enfin à :

compression d'un gaz parfait =  $d(T/V) / dt$

et on a éliminé le fait que la compression dépend de plusieurs paramètres fonction les uns des autres. En définitive on peut calculer (modéliser) cette compression plus facilement

Voilà, voilà ... pour la variation, passons à la conclusion.

## La conclusion

En guise de conclusion je me bornerais à vous dévoiler que de la somme et variation nous avons abordé le calcul différentiel et intégral très apprécié des lycéens !

En effet dans la partie « somme » , je vous ai présenté le calcul intégral car en

mathématique le signe  $\int$  se dit intégrale.

Dans la partie « variation » les signes  $d(..)$  et  $\partial(..)$  sont la notation des différentielles. Dans le premier cas ( $d...$ ) on parle de différentielle tandis que signe  $\partial$  définit une différentielle partielle que l'on peut « traduire » par il existe d'autres grandeurs qui agissent simultanément (en relation) pour définir la fonction étudiée.

Le calcul différentiel ou infinitésimal permet le calcul de la variation instantanée d'une grandeur, exemple la vitesse instantanée de votre voiture est définie par les différences infinitésimales de distance et de laps de temps On parle également de la dérivée (variation de la vitesse), de la pente (courbe espace-temps).

Le calcul intégral permet lui de définir une somme d'élément infinitésimaux. Il est à remarquer que le signe  $\int$  a été introduit en faisant référence à la première lettre du mot latin « summa » (somme).

*On peut dire que le calcul différentiel et le calcul intégral sont approximativement des opérations inverses.*

somme et variation : même combat !

*Voilà, voilà ... c'est fini ....., vous pouvez vous réveiller.*