Triangulation

Qu'est-ce que la triangulation ? et surtout à quoi peut-elle servir ?

La triangulation ?

C'est une des plus anciennes techniques humaines pour construire ou se repérer. Elle a servi dans la construction des pyramides ou la cartographie mondiale et actuellement elle est permet l'utilisation du GPS, le calcul de sollicitation, la représentation 3D, dans les jeux et même en politique ou psychologie. (Wikipédia)

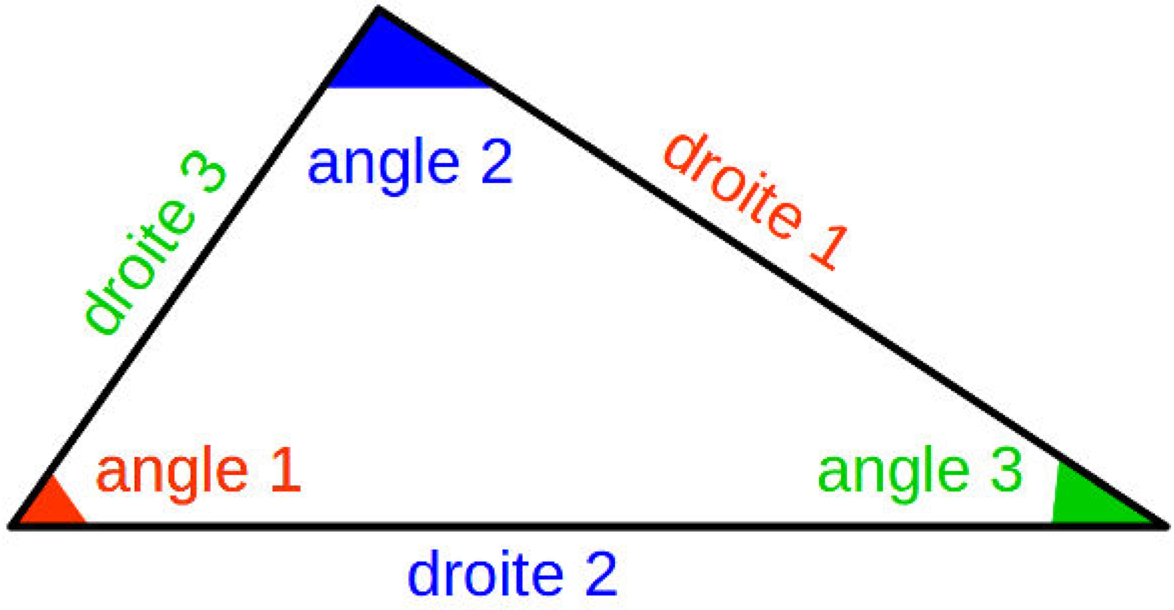
C'est une technique basée sur un ensemble de 3 (ou multiples) entités. J'écris volontairement le terme "entité" pour spécifier que le principe de la triangulation peut-être appliqué à tout de sorte de situation. Mais pour illustrer cette technique nous allons étudier une forme géométrique plane : les triangles, cela vous l'avez déjà deviné 🙂 . Un triangle est une forme géométrique formée de :

3 côtés et donc de 3 angles

Voilà tout est dit, maintenant que vous savez que la triangulation est l'utilisation des triangles pour se repérer cet exposé est terminé. Pour ceux qui veulent en connaître un peu plus, passez au chapitre qui suit 🙂 !

Un triangle

Si vous avez oublié ce qu'est un triangle en géométrie plane :



Comme vous le constatez, c'est une figure géométrique de trois droites (avec trois angles). La relation entre les angles de notre triangle, c'est que leur somme égale 180°. Petite vidéo de démonstration (2′) pour ceux qui ne me croient pas, on commence par dessiner un triangle avec une hauteur :

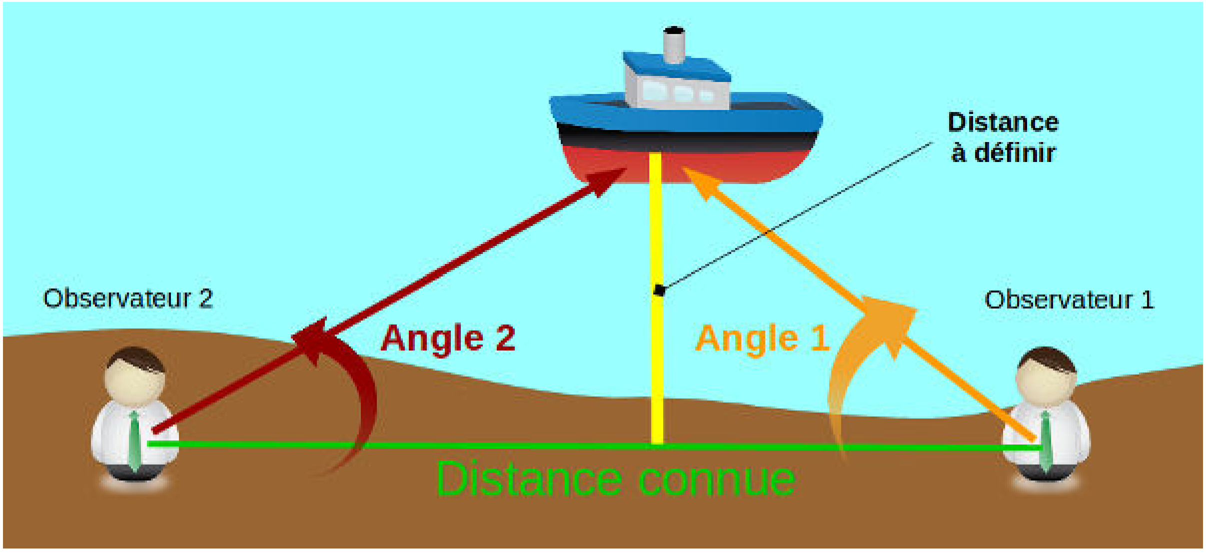
RÈGLES IMPORTANTES

Dans un triangle ce que l'on constate, c'est que si l'on modifie une grandeur, on modifiera aussi d'autres grandeurs du triangle ! Ceci sous-entend que les grandeurs de notre triangle sont liées entre elles, le triangle est soumis à des règles, en voici quelques-unes :

1.- Somme des angles d'un triangle est égale à 180°

2.- Si l'on connaît deux cotés et un angle d'un triangle (ou deux angles et un côté) on peut par calcul complètement déterminer les autres caractéristiques de ce triangle.

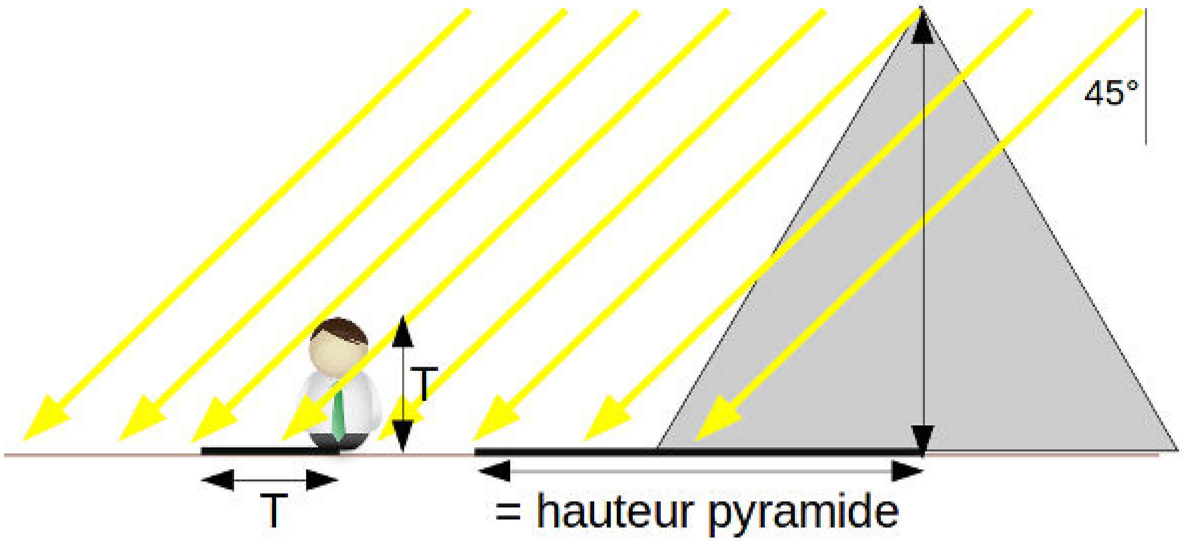
Nous avons démontré la première règle, pour la seconde nous reprendrons les travaux de nos anciens, les plus motivés ont en fin d'article les relations mathématiques des triangles. Thalès (-600 ans) semble avoir été un des premiers à utiliser la triangulation, il nous indique par exemple comment calculer la distance d'un bateau par rapport à la rive. Pour y *parvenir, il plaça deux observateurs le long de la rive, à bonne distance l'un de l'autre et leur demanda de définir l'angle entre la droite bateau-observateur et la droite observateur-observateur. Une petite visualisation de la chose :*



Grâce aux relations entre les caractéristiques des triangles, il définit la distance du bateau à la rive.

AUTRE ANECDOTE

Dans le même ordre d'idée il fut demandé à Thalès de définir la hauteur de la pyramide de Khéops. Il n'utilisa pas la triangulation pour résoudre ce problème mais ses connaissances des triangles. Selon la légende Thalès aurait remarqué que son ombre était de même longueur que sa hauteur. Il était sur place le bon jour, une chance ? Ehh oui, car cela ce produit seulement deux jours par an au niveau de la pyramide de Khéops lorsque les rayons du soleil sont à 45°. On ne sait pas mais grâce à cette coïncidence, il mesura l'ombre de la pyramide qu'il traduisit en "Thalès," sa hauteur, pour la communiquer aux prêtres du lieu qui furent très impressionnés ! Comme dans l'anecdote précédente il utilise les caractéristiques et les règles du triangle pour définir la caractéristique intéressante.



La triangulation, exemples d’utilisation

Nous avons vu précédemment comment connaître la distance et la position d’un objet par rapport à deux points connus. Regardons comment fut défini la longueur du mètre de l’étalon mètre qui servit de longue année comme référence mondiale.

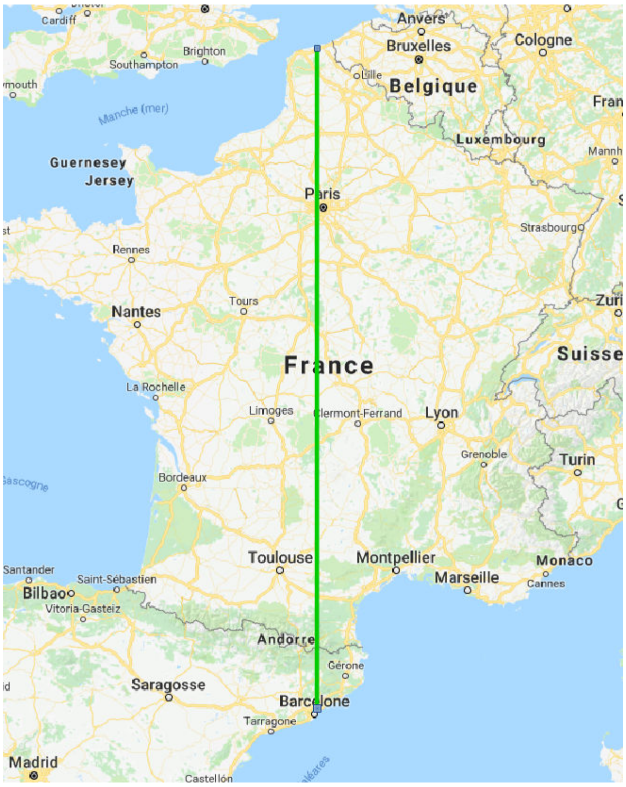
LE MÈTRE ÉTALON

Au mois de mars 1791, soit au milieu de la révolution française (1789-1799), il fut décidé de définir une longueur de référence, le mètre, comme étant la dix millionièmes partie du quart du méridien terrestre, comme cela cette longueur de référence n’appartenait à aucun peuple mais à tous. le seul problème pour réaliser un objet ayant cette longueur, c’était de connaître la longueur du méridien qui correspondait à l’époque au cercle complet de la terre. Pour mesurer cette longueur, qui fut une aventure, il fallut huit années de travail “Épopée de la mesure du mètre“.

Pour réaliser cette mesure par triangulation, il suffit d’appliquer le principe de Thalès avec son bateau. Vous mesurez la distance entre deux endroits dégagés, c’est la seule longueur à mesurer. Depuis chaque lieu, mesurez l’angle entre un nouveau repère et l’alignement des deux premiers endroits et ainsi de suite de proche en proche. Vous pouvez définir chaque caractéristique des triangles ainsi défini. À l’époque ce fut difficile, car en pleine révolution, *les clochers ou autres statues qui pouvaient servir de repère ne restaient pas toujours debout !*

Le procédé utilisé fût la mesure de la distance Dunkerque – Barcelone par la triangulation qui permit de définir le quart du méridien et donc la longueur du mètre étalon à fabriquer. En 1799, le mètre étalon vit le jour.

Plus de cent triangles furent nécessaires définir l'arc du méridien



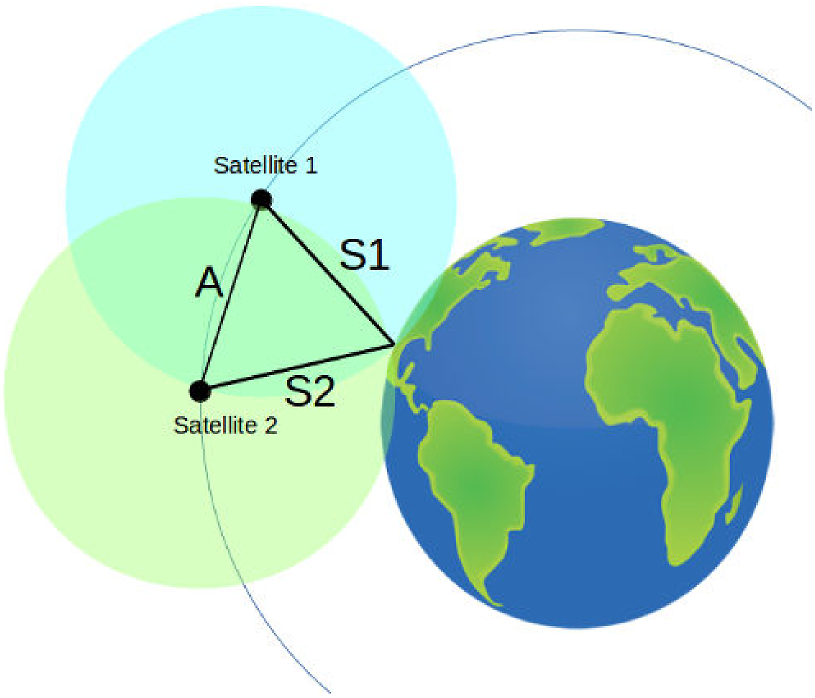
LE LORAN

Depuis les années 1960 à nos jours (quoique par exemple en Méditerranée il est désactivé), le système [LORAN](#) (LOng RAnge Navigation) permet aux navires de se positionner en mer. C'est vraiment une réplique moderne du système imaginé par Thalès. Une petite vidéo (en anglais mais avec sous-titre en français) d'une minute et demie.

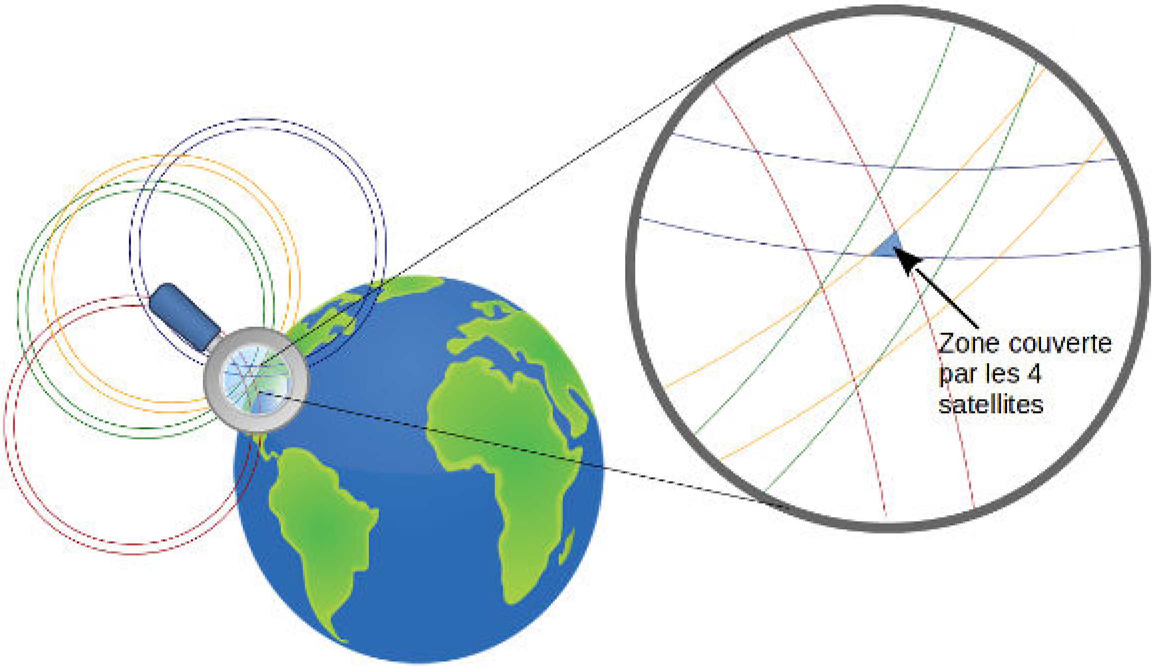
LE GPS

Vous trouvez partout dans les voitures, les mobiles, le guide de promenade, etc, des appareils avec la mention GPS, mais qu'est-ce donc en fait ?

GPS (Global Position System) est un système qui permet de se positionner, il répond à la question : "Où suis-je ?". Pour la plupart des gens, il est identifié comme le service "offert" par les Américains au monde. Ce système est constitué actuellement d'une trentaine de satellites situés autour de la terre à environ 20'000 km d'altitude. Ce qui correspond à des orbites d'une douzaine d'heures pour le tour de la terre. Chaque satellite envoie régulièrement la date (heure précise) et son code personnel. Les satellites sont les points fixes connus et la mesure des distances sont en fait la transcription du temps de parcours des messages.



La distance A est connue, définie par un système central de contrôle des satellites. En fait, on informe le satellite de l'erreur de position qu'il a par rapport à sa position théorique. Les distances S1 et S2 sont définies par leurs temps de transmission soit S1 = temps de transmission x vitesse de la lumière. Donc on comprend bien pourquoi la précision du temps est importante, une erreur d'un millième de seconde correspondra à une erreur de 300km ! les satellites ont des horloges atomiques ultra précises. Bien sûr le schéma ci-dessus permet de raisonner sur un plan mais en réalité nous vivons dans un monde de *volume (3D), donc pour définir une position sur terre il est au minimum nécessaire d'avoir trois signaux (satellites). Avec ce minimum nous ne serions pas précis et donc on devra capter le signal de plus satellites pour mieux définir notre position. Actuellement les chips électroniques internes aux GPS du marché permettent de suivre jusqu'à 22 satellites.*



Les divers risques d'imprécision d'un système GPS sont, outre la position des satellites, la réfraction de la ionosphère et plus près de nous, de la troposphère qui toutes les deux modifient la vitesse de propagation du signal. Autre source d'imprécision qui peut-être handicapante, les multiples réflexions dus à des objets, des obstacles autour des récepteurs GPS.

Il est à noter que le système américain GPS est concurrencé par le système russe GLONASS et le système européen GALILEO. Ces systèmes sont semblables. Le GPS actuel propose des précisions de l'ordre de 10 à 20m, bien qu'il soit possible d'obtenir par diverses techniques une meilleure précision.

Ne pas oublier lors de l'utilisation d'un récepteur GPS ("un GPS"), c'est qu'il est nécessaire d'attendre quelques minutes (secondes) pour permettre à votre GPS de capter et d'interpréter les signaux des satellites particulièrement lors de son enclenchement. Après un arrêt prolongé il lui est aussi nécessaire d'avoir un peu de temps pour définir votre mouvement, sa direction et sa vitesse. Certains GPS définissent la vitesse par une mesure de l'[effet Doppler](#) sur le message satellitaire reçu. Soit la différence de fréquence relative *du signal du satellite capté, suivant que vous vous éloignez ou approchez dans la direction des signaux.*

Conclusion

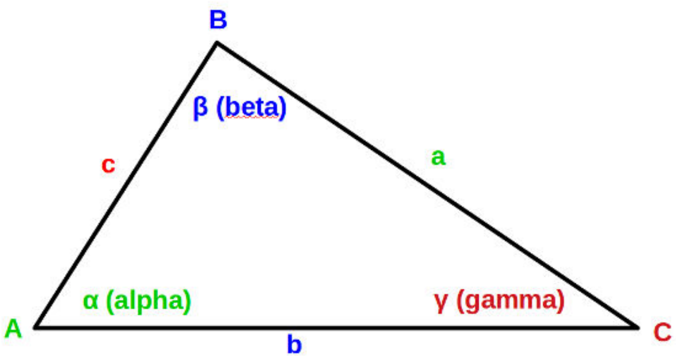
Cette très ancienne méthode, la triangulation, bien que simple, nous aide tous les jours dans de nombreuses activités .... on dit merci qui ?

Merci Monsieur Thalès ! 

Pour les plus “matheux”

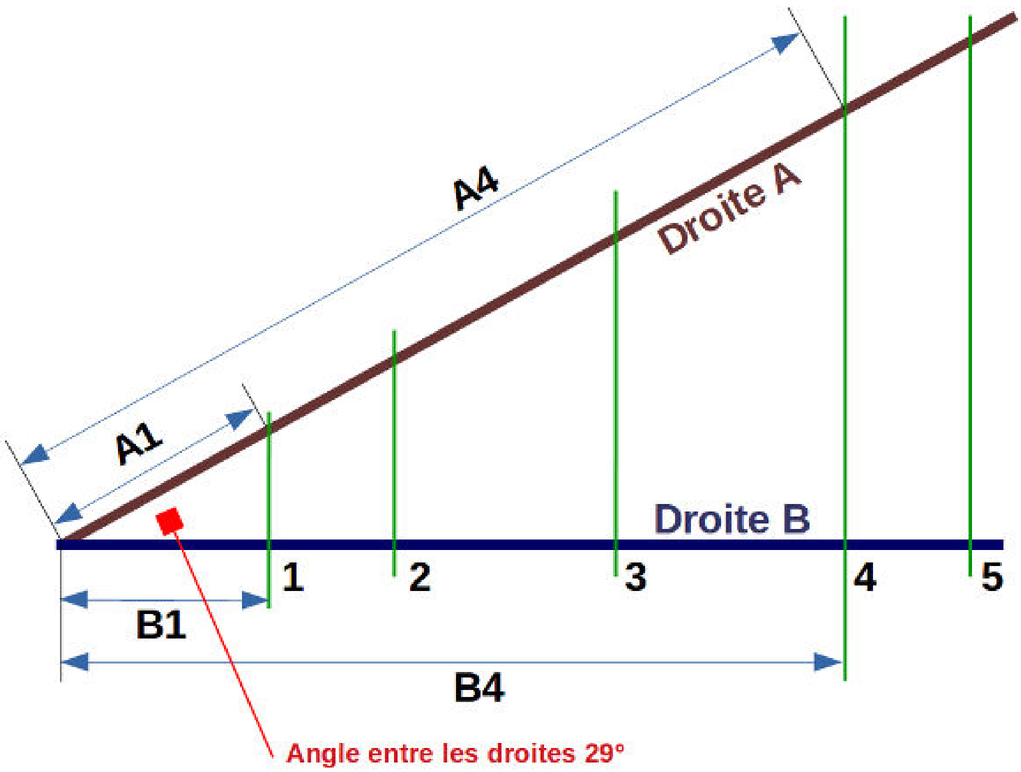
CONVENTION

Conventionnellement on représente un triangle avec les noms comme suit. Les sommets en majuscule “A”,”B”,”C”, les côtés opposés aux sommets en minuscule “a”,”b”,”c” et les angles “α”,”β”,”γ”.



TRIGONOMÉTRIE

(Pour plus d'explications Wikipédia) Nous avons déjà vu une relation entre les angles d'un triangle, voyons comment varie le rapport entre deux droites qui définissent un angle. Les droites A et B forme un angle, les lignes vertes indiquent la position du calcul des rapports. Elles doivent être parallèles entre-elle pour que le rapport soit intéressant. Sur le schéma ci-dessous, je les ai mis en plus volontairement perpendiculaires à la droite B mais cela est complètement arbitraire



Si l'on fait les différents rapports soit B1/A1, B2/A2, B3/A3, B4/A4 et B5/A5 on trouvera toujours la même valeur ! Dans notre cas de figure, nous trouverons environ 0.8746. On comprend donc que le rapport des longueurs est toujours le même mais ceci pour un angle donné ! Pour nous simplifier la vie nous appellerons, "au hasard ", ce rapport le cosinus de l'angle et que nous noterons, autre hasard, cos(angle) !

Pour ne pas toujours recalculer ces rapports, "Thalès et compagnie" ont écrit ces rapports dans des recueils qui s'appellent une table des sinus. Voici un grossier exemple de ce que vous pouvez trouver comme table.

Angle (degré)	Sinus	Cosinus
0	0,00000	1,00000
10	0,17365	0,98481
20	0,34202	0,93969
30	0,50000	0,86603
50	0,76604	0,64279
60	0,86603	0,50000
70	0,93969	0,34202
80	0,98481	0,17365
90	1,00000	0,00000
100	0,98481	-0,17365

De ces rapports sinus, cosinus, tangente on peut tirer quelques règles mathématiques que je ne vous démontrerais pas, mais vous trouverez tout cela sur le web. Vous pourrez constater que l'on peut construire un triangle quelconque du moment que l'on connaît 3 éléments sur les six le définissant (3 longueurs, 3 angles). Mathématiquement voilà comment cela se présente :

LOI DES SINUS

sur Wikipédia

$$\frac{a}{\sin(alpha)} = \frac{b}{\sin(beta)} = \frac{c}{\sin(gamma)}$$

LOI DES COSINUS

sur Wikipédia

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(gamma)$$

SYNTHÈSE

Pour vous faciliter la vie il y a déjà des personnes qui ont réalisé votre rêve de tout connaître du triangle. En mélangeant ces lois ils vous livrent les clés : par exemple ici